目　　录

第一章 常微分方程模型的归结及基本概念

§1 基本概念

什么是常微分方程？让我们先从几个例子谈起.

例 1 求一个函数 $x=x(t)$，使它的导数等于一个给定的函数 $f(t)$.

由微积分可知，$x(t)$ 实际上就是已知函数 $f(t)$的原函数.按题意列方程式得

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(t), \tag{1}$$

它的解为

$$x(t)=\int f(t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

例 2 求一条曲线 $\Gamma: y=y(x)$，使其上任一点 $(x, y(x))$处的切线垂直于此点与原点的连线.

曲线 Γ 在其上任一点$(x,y(x))$处切线的斜率为$y'(x)$，如图 1.1 所示，有 $\operatorname{tg}\alpha=y'(x)$，$\alpha=\beta+\pi/2$，

$$\operatorname{ctg}\beta=x/y(x).$$

按题意可列出方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}&=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\\&=-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{x}{y(x)},\end{aligned}$$

此方程可简化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}. \tag{3}$$

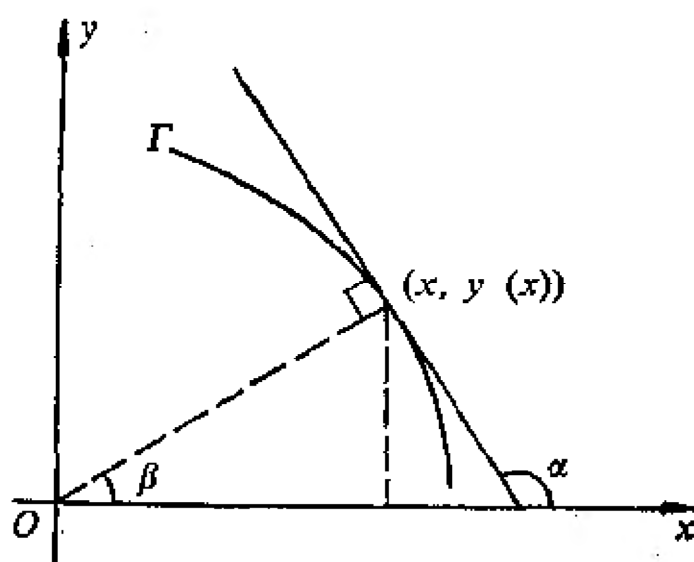


图 1.1

例 3 质量为 m 的物体以初速为零自高处垂直下落，受到的空气阻力与物体速度的平方成正比，比例系数等于 k，求落体的运动规律。

假设物体下落的路程以函数 $s(t)$ 表示，t 为时间，由微积分可知，速度 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，加速度 $a=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$。

在物体下落时，它受到与运动方向一致的重力

$$P=mg,$$

其中 g 为重力加速度；还受到与运动方向相反的空气阻力

$$F=kv^2=k\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

k 为正常数。根据牛顿(Newton)运动第二定律得

$$P-F=ma,$$

这样，就有方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=mg-k\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{4}$$

按题意与运动有关的约束条件可表为初始时刻 $t=0$ 时的条件

$$s(0)=0,\ v(0)=s'(0)=0. \tag{5}$$

形如(5)的条件称为*初始条件*。

例 4 本世纪初，物理学家卢瑟福(Rutherford)等人证明，某些"放射性"元素的原子是不稳定的，并且在一段时间内总有一定比例的原子自然衰变而形成新元素的原子．用单位时间内衰变的原子数来描述物质的放射性与所具有的原子数成正比。

如果用 $N(t)$ 表示时间 t 时放射性物质具有的原子数，那末 $\frac{dN}{dt}$ 就表示单位时间内衰变的原子数，它与 N 成正比，记比例系数为 λ．由于原子数不断减少，故 λ 是一个负常数。列出方程式如下：

$$\frac{dN}{dt}=\lambda N. \tag{6}$$

设初始时刻 t_0 时该物质具有的原子数为 N_0，则有初始条件

$$N(t_0)=N_0. \tag{7}$$

例 5 17世纪末至 18 世纪初，牛顿发现在较小的温度范围内，物质冷却的速率正比于物质的温度和外界温度的差。

为了导出相应的数学模型，先看下面的实验。

把 150 毫升甲醇样品放在玻璃烧杯中，加热至 50℃，然后在温度 T_0 为 23.2℃ 的室内逐渐冷却，将液体内部的温度作为时间的函数记录下来，取横坐标为时间 t，纵坐标为 $\ln(T-T_0)$，将数据作成图像，如图 1.2 所示，图形非常接近于一条直线，其斜率是 $k=-6.6\%$，方程是

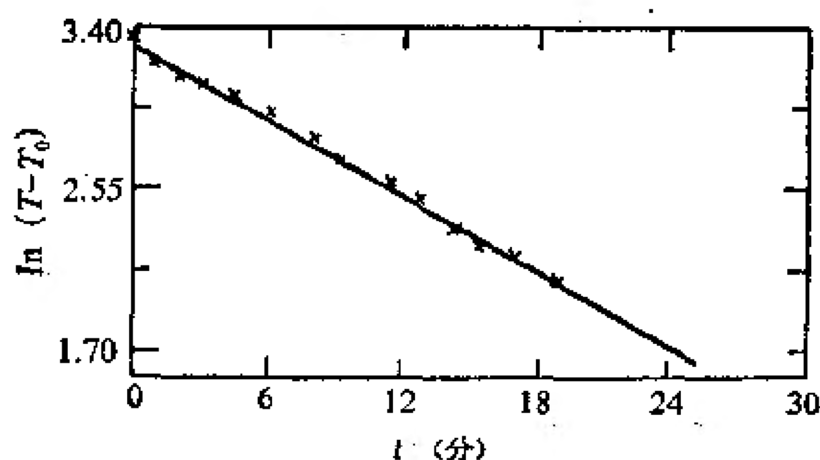


图 1.2

$$\ln(T-T_0)=-kt+b. \tag{8}$$

这就是相应数学模型的解的函数表达式。现由它反推出数学模型来，将(8)关于 t 求导，得

$$\frac{1}{T-T_0}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k,$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-T_0). \tag{9}$$

这就是牛顿冷却定律的数学形式。它是科学史上最早的微分方程之一，当初牛顿是用经验方法得出的。

上面五个例子中推导出的方程有一个共同的特点：未知的是含有一个自变量的函数，又方程中含有未知函数的导数。我们称这类方程为常微分方程就是偏微分方程。

如果在一个方程中有两个或两个以上的自变量的未知函数，且含有未知函数对这些自变量的偏导数，那末就是偏微分方程。例如，下面两个方程式。

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial T(t,x,y)}{\partial t}=\frac{\partial^2 T(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(t,x,y)}{\partial y^2}. \tag{11}$$

此后，我们往往把常微分方程简称为微分方程，甚至于更简单地称为方程。

常微分方程的类型有以下几种划分的方法。

一种是考虑方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数（也称为常微分方程的阶）。例如，方程(1)，(3)，(6)，(9)均是一阶方程，而方程(4)是二阶方程。一般的 n 阶常微分方程可表示为

$$F\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right)=0, \tag{12}$$

其中 t 是自变量，x是未知函数，$F\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}\right)$是 $n+2$个变量

$t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^n x}{dt^n}$的已知函数，且$F$中明显地出现变量$\frac{d^n x}{dt^n}$。

另一种是考虑未知函数及方程的个数。例如下面方程

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2 + t, \tag{13}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 2x_2 + \sin t \tag{14}$$

构成了包括两个未知函数（即 x_1, x_2）及两个方程组成的方程组。

常微分方程的解有显式与隐式两种形式。显式形式 $x = \varphi(t)$ 称为方程(12)的解是指函数 $\varphi(t)$ 在某区间 $a<t<b$ 内有 n 阶连续导数，且使

$$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$$

在 $a<t<b$ 内恒成立，其中区间 $a<t<b$ 称为解 $x = \varphi(t)$ 的定义区间。但有时不易求得显式形式的解，而只求得 t, x 的关系式 $\Phi(t, x) = 0$。若由它确定的函数 $x = \varphi(t)$ 是(12)的解，则称 $\Phi(t, x) = 0$ 是方程(12)的隐式形式解，简称为方程(12)的积分。对于一个微分方程，求得它的积分，就相当于求得它的解。解或积分在 t，x 平面上的几何表示是平面曲线，称为方程(12)的积分曲线。

在例 5 中，由(8)得

$$T(t) = T_0 + e^{-kt+b} \tag{15}$$

易验证它是方程(9)在整个实轴上定义的解。

在例 2 中，将方程(3)视为比例等式，对角相乘并两边积分得

$$\int y dy = -\int x dx,$$

$$y^2 + x^2 = C, \tag{16}$$

其中 C 为正的常数，这表明圆心在原点的一族同心圆是例 2 要求的曲线。易验证由(16)确定的隐函数满足方程(3)。

方程(3)的解(16)中含有任意常数 C。方程(9)的解(15)中含有的参数 k, b, T_0 都是确定的。往后，我们把含有任意常数的显式解称为方程的通解，而把含有任意常数的隐式解（积分）称为方程的通积分。又

把不含任意常数或通解(通积分)中任意常数取为确定值的解为特解.

§2 模型归结

常微分方程与微积分是同时产生的，一开始就成了人类认识世界和改造世界的有力工具. 随着生产实践和科学技术的发展，常微分方程也不断地演变发展为数学学科中理论联系实际的一个重要分支. 在力学、物理、化学、生物学、医学、自动控制和经济管理等学科中,在电子技术、星际航行及工业与农业的许多领域里,人们已经提供了大量应用常微分方程的实例.

应用常微分方程解决实际问题的步骤如同其它的应用数学学科一样,通常分为以下三个基本步骤:

(1) 由实际问题建立相应的数学模型——常微分方程(组);

(2) 求解与分析这一数学模型,即求出相应的常微分方程(组)的解,或是精确解,或是近似解,其中还包括分析解的特性;

(3) 利用所得的数学结果,利用解的形式和数值,利用解的定性分析,回过头去解释实际问题,从而预测某些自然现象甚至社会现象中的特定性质,以便达到能动地改造世界、解决实际问题的目的.

下面就基本步骤 (1)讲些基本方法及类型，并为今后章节讲述解法与进行定性分析提供一些实际的背景.

常微分方程模型的归结方法有如下几种:一是根据规律列方程;二是微元分析法;三是模拟近似法.

一、根据规律列方程

前面 §1中的例2、例3、例4、例5各方程的建立用的就是根据规律列出方程的方法. 大家知道，在数学、力学、物理、化学等学科中已有许多经过实践或实验检验的规律或定律,如牛顿运动定律、牛顿冷却定律、曲线的切线的性质、物质放射性的规律等，它们都涉及到某些函数的变化率. 当然,为了列出相应的常微分方程,有几个要素必须首先明确,如自变量、未知函数、必要的参数与常数、坐标系等.

下面再通过几个实例来说明这种方法。

例 1 电容器的充电和放电

如图 1.3 所示的 $R-C$ 电路，开始时电容 C 上没有电荷，电容两端的电压为零。我们把开关 K 合上至“1”，电池 E 就对电容 C 充电，电容 C 两端的电压 v_c 逐渐升高，经过相当时间后，电容充电完毕。我们再把开关 K 合至“2”，这时电容就开始了放电过程。而现在要求找出充电和放电过程中电容 C 两端的电压 v_c 随时间 t 变化的规律。

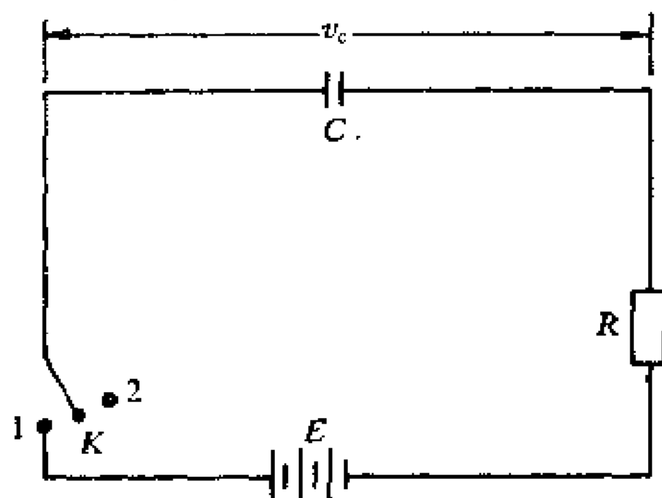


图1.3

解 取时间 t 为自变量，未知函数为电容 C 两端的电压 $v_c(t)$。用于建立方程的规律是关于闭合回路的基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律，即电池的电势 E 等于回路中电势降的和。现是 R-C 电路，即有电容 C 两端的电压 v_c 与电阻 R 的电势降 RI，其中 $I=I(t)$ 为回路中的电流。按基尔霍夫第二定律可列出方程

$$E=v_c+RI. \tag{1}$$

又设电容 C 上的电量为 $Q(t)$，则

$$I(t)=\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cv_c(t))=C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

将(2)代入(1)得

$$RC\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}+v_c=E, \tag{3}$$

其中 R,C,E 全是已知的常数。(3) 是一阶线性常微分方程。为找出

$v_c(t)$，需要给出初始条件：$v_c(0)=0$，即开始把 K 接至"1"时，也就是对 C 开始充电时，C 的两端电压 v_c 应为零。

下面求解(3)。将(3)改写为

$$\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_c-E}{RC},$$

或写为

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}(v_c-E)}=-\frac{RC}{v_c-E},$$

将 t 视为未知函数，v_c-E 为自变量，则得

$$t=\int-\frac{RC}{v_c-E}\mathrm{d}(v_c-E)$$

$$=-RC\ln|v_c-E|-RC\ln A,$$

其中 A 为任意常数。还原写成 $v_c(t)$ 的函数形式

$$v_c=E+A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}. \tag{4}$$

这就是方程(3)的通解。现用初始条件 $v_c=0$ 去确定 A，从而求得特解，也就是求得充电过程中电容 C 两端电压随时间变化的规律 $v_c(t)$。将 $t=0$ 代入(4)得

$$0=v_c(0)=E+A,$$

即有 $A=v_c(0)-E=-E$，所以

$$v_c(t)=E(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}). \tag{5}$$

把(5)的关系用图 1.4 画出来。充电过程中电压 v_c 从零开始逐

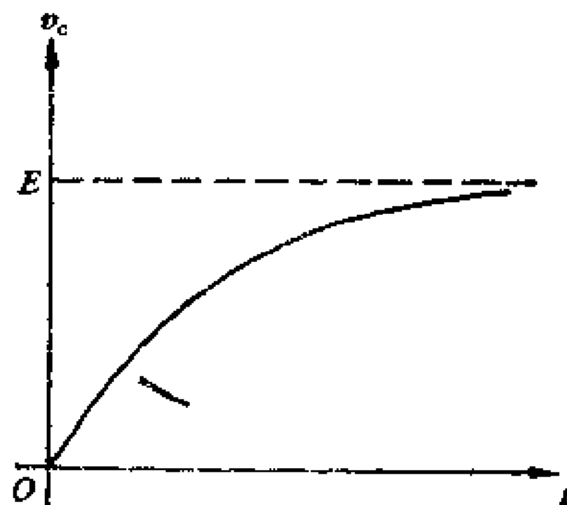


图 1.4

渐增大，且当 $t\to+\infty$ 时，$v_c(t)\to E$。在电工学中，通常称 $\tau=RC$ 为时间常数，当 $t=3\tau$ 时，$v_c(3\tau)=0.95E$，就是说，经过时间 3τ 后，电容 C 上的电压已达到外加电压的 95%，实用上，通常认为这时电容 C 的充电过程基本结束。充电完毕时 $v_c=E$。

对于时间常数 $\tau=RC$ 的意义还可以从方程

$$x+\tau\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=E$$

看出，如果 x 自 t_0 开始以恒速 $\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$ 增长，则经时间 τ 以后达到最终的稳态值 E。

对于放电过程的讨论，可以类似地进行。此时方程为

$$v_c+RC\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}=0, \tag{6}$$

初始条件为 $v_c(0)=E$。解为 $v_c=Ee^{-\frac{t}{RC}}$，由此可见电容 C 两端的电压从开关 K 刚触及"2"取 E 值开始逐渐减少直至零。这就是整个放电过程的数学描述。

例2 单摆

质量为 m 的球，用长为 l 的细线悬挂在 O 点(如图1.5)，在地球引力下作往复摆动，若不计悬线的质量，则称此系统为单摆，试求摆球 m 的运动方程式。

解 以时间 t 为自变量，细线与垂线的摆角为未知函数 $\theta(t)$。运用牛顿运动第二定律来列方程。设逆时针方向为 θ 的正向。

先分析摆球在运动时受力的情况。在摆线偏角为 $\theta(t)$ 时，重力 mg 在运动方向的投影为 $mg\sin\theta$，它将摆拉向平衡位置，重力 mg 在 Om 连线方向上的分力与线的张力相平衡，还有阻力 R，它的方向与运动方向反向，其大小与速度 $l\dot{\theta}(t)$ 成正比，比例系数记为 $\mu>0$。由牛顿运动第二定律，得到在摆球运动方向上诸力之和等于 $ml\ddot{\theta}(t)$，即有

$$-mg\sin\theta-\mu l\dot{\theta}=ml\ddot{\theta},$$

或写为

$$\ddot{\theta}(t)+\frac{\mu}{m}\dot{\theta}(t)+\frac{g}{l}\sin\theta(t)=0. \tag{7}$$

这是二阶非线性常微分方程。

当 θ 充分小时，即摆球作小振幅摆动时，$\sin\theta\sim\theta$，故可得近似的方程

$$\ddot{\theta}(t)+\frac{\mu}{m}\dot{\theta}(t)+\frac{g}{l}\theta(t)=0 \tag{8}$$

这是一阶常系数线性微分方程。

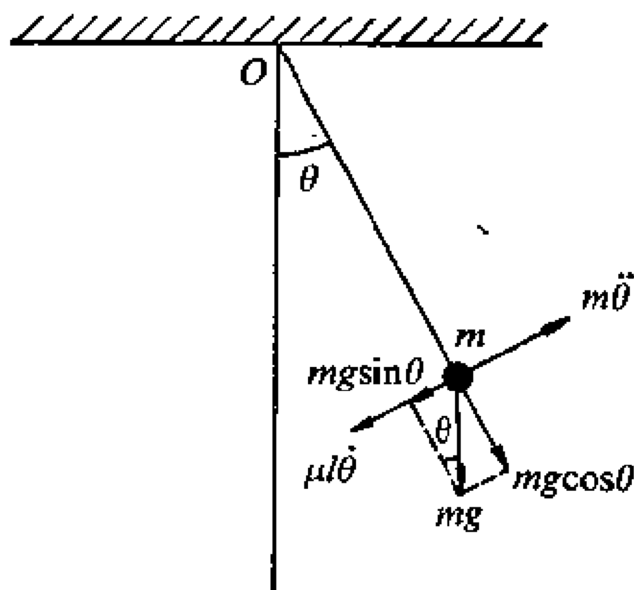


图 1.5

初始条件可以假设为：初始时刻 $t=0$时，$\theta(0)=\theta_0,\dot{\theta}(0)=\varphi_0$，特别地可取 $\theta(0)=0,\theta(0)=\varphi_0$，$\varphi_0$ 是常数。

例 3 收音机接收回路的简化 L—C 电路

现来考虑如图 1.6 所示的 L—C 电路，它是收音机接收回路的简

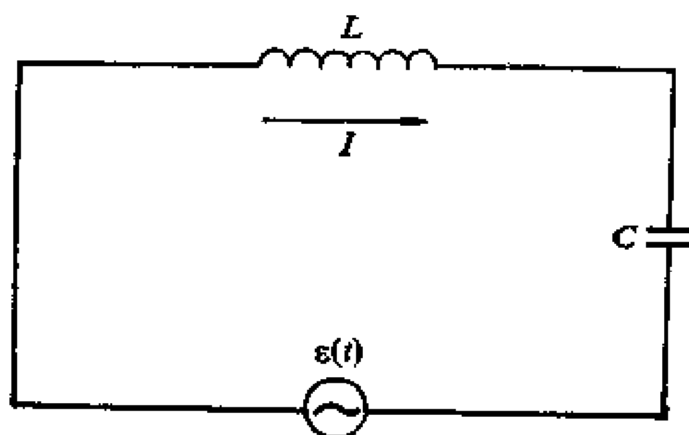


图 1.6

化电路．是由电容 C 、电感 L 和某个无线电电台发射的无线电波的电磁场产生的感应电动势 $\varepsilon(t)$ 串联所成的回路．

可用基尔霍夫定律来建立对应的常微分方程．自变量取时间 t，未知函数取回路中的电流强度 $I(t)$．电感 L 的电压降为 $L\frac{dI}{dt}$，电容 C 的电压降为 $\frac{Q}{C}$，其中 Q 为电量，由 I 的定义得 $I=\frac{dQ}{dt}$，或 $Q=\int I dt$，在整个回路中，所有支路上的电压的代数和等于零，即有

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int I dt-\varepsilon(t), \tag{9}$$

但上述关于 I 的方程中既有 I 的导数，又有 I 的积分，它还不是微分方程．但可将其归结为一个未知函数的二阶微分方程．为此令 $x=\frac{1}{C}\int I dt$，则有 $C\frac{dx}{dt}=I$．于是，

$$LC\frac{d^2x}{dt^2}+x=\varepsilon(t) \tag{10}$$

如果仍用 I 作未知函数，可以得到关于 I 的微分方程

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{LC}I=\frac{1}{L}\varepsilon'(t). \tag{11}$$

二、微元分析法

用微积分的微元分析方法去建立常微分方程，实际上是寻求一些微元之间的关系式．在建立这些关系式时也要用到已知的规律与定理，与第一种方法不同之处在于这里不是直接对未知函数与未知函数的导数应用规律和定理来得出关系式，而是对某些微元来应用规律的．

例 4 有高为 Hcm的半球形容器，水从它的底部小孔流出，小孔的横截面积为 $S\text{cm}^2$，开始时容器盛满水，问要多少时间水流完？

解 见图 1.7，设自变量为时间 t，未知函数 $h(t)$ 表示水面的高

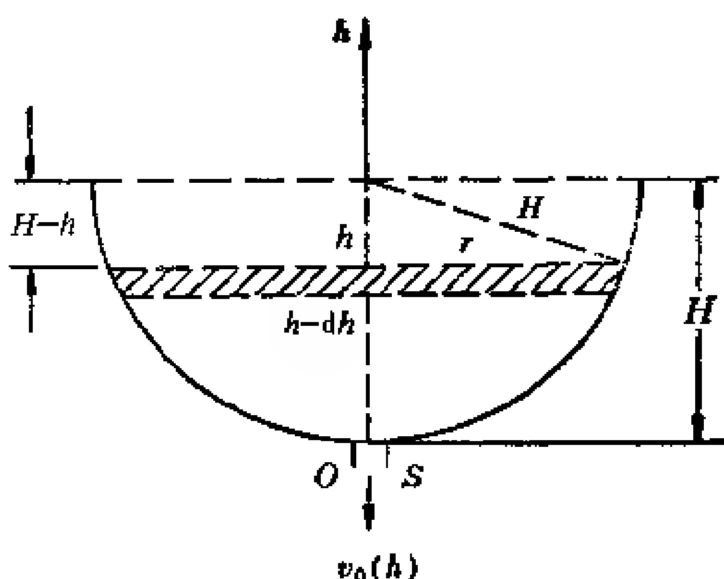


图 1.7

度。设坐标原点 O 在底部小孔处，h 的正向指向球心。初始时刻 $t=0$ 时，水面高度 $h(0)=H$，现要建立 $h(t)$ 所满足的微分方程，并由 $h(T)=0$ 求出水流完所需的时间 T。

时刻 t 的水面高度为 $h(t)$，简写为 h，时刻 $t+\mathrm{d}t$ 时水面高度为 $h+\mathrm{d}h$，注意到水面是不断降低的，故 $\mathrm{d}h<0$。下面进行微元分析。考虑从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 这段时间内容器内水体积的微元改变量（图 1.7中的一个阴影部分的水面层）为 $\mathrm{d}V=-\pi r^2\cdot\mathrm{d}h$，其中 $r=\sqrt{H^2-(H-h)^2}$，另一方面从面积为 S 的小孔在从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 这段时间内流出的水的微元体积改变量为 $S\cdot v_0(h)\cdot\mathrm{d}t$，其中 $v_0(h)$ 为水面高度h时从小孔中流出的水沿 h 轴反向的速度。这里，近似地把在 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 这段时间里，即水面高度从 h 到 $h+\mathrm{d}h$ 时的流出水的速度看成保持不变的 $v_0(h)$。根据水力学中有关的定律得

$$v_0(h)=0.62\sqrt{2gh},$$

这里 g 为重力加速度。

根据上面的分析得

$$\mathrm{d}V=-\pi r^2\mathrm{d}h=S\cdot v_0(h)\mathrm{d}t. \tag{12}$$

将 r 与 $v_0(h)$代入(12)式得

$$-\pi[H^2-(H-h)^2]\mathrm{d}h=0.62\,S\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t,$$

即有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{-0.62\,S}{\pi}\sqrt{2gh}\cdot\frac{1}{2Hh-h^2}. \tag{13}$$

为了求解关于h的一阶方程(13)，将它改写为(实际上把t视为未知函数)

$$\mathrm{d}t=\frac{-\pi}{0.62\,S}\cdot\frac{(2H-h)\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\,\mathrm{d}h, \tag{14}$$

两边求积分，有

$$t=\int_H^h\frac{-\pi}{0.62S\sqrt{2g}}(2H-h)\sqrt{h}\,\mathrm{d}h. \tag{15}$$

因此，所要求的

$$T=\int_H^0\frac{-\pi}{0.62S\sqrt{2g}}(2H\sqrt{h}-h^{3/2})\mathrm{d}h$$

$$=\frac{-\pi}{0.62S\sqrt{2g}}\left[\frac{4H}{3}h^{3/2}-\frac{2}{5}h^{5/2}\right]_{h=H}^{h=0}$$

$$=\frac{-\pi}{0.62S\sqrt{2g}}\left[\frac{2}{5}H^{5/2}-\frac{4H}{3}H^{3/2}\right]$$

$$=\frac{7\pi H^{5/2}}{4.65\,S\sqrt{2g}}.$$

例 5 杆件中热的传递

将一水平的金属杆的两端置于支架上，其间的距离为L(见图1.8)。

设杆件的左端Q_1维持在一固定的温度T_1，而右端Q_2也维持在另一固定的温度T_2，假定$T_2<T_1$。又设温度与时间t无关。

此杆件的导热系数为λ，形状像一扁铁条。截面面积为A，截面的周界为P。杆件表面对周围介质的传热系数设为常数α，杆的周围介质的温度为T_3。试确定杆件中任何点的温度与此点离热端的距离之间的关系。

解 一般地讲，杆件横截面上各点的温度还依赖于离开杆件表面的距离，因此杆件中任何点的温度应是离热端距离x及离表面距离

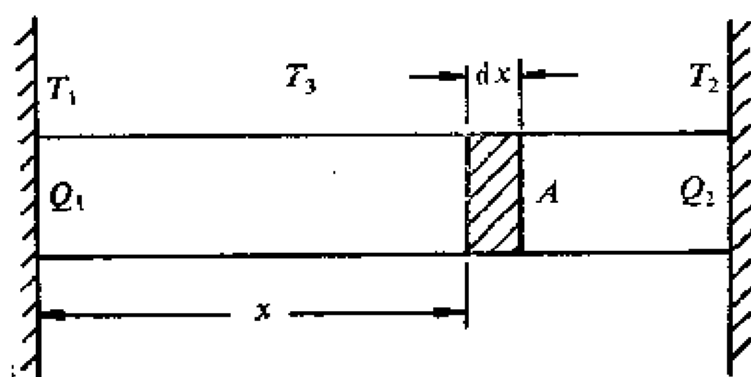


图 1.8

y 的二元函数。本例中假设杆件非常细，且它的导热系数又很大，因此可以忽略垂直于轴心方向的温度变化，而不致引起显著的误差。在这样的假定下，温度仅为一个自变量 x 的函数 $T(x)$。

下面取时间的微元段 $\mathrm{d}t$ 和杆件上距离的微元段 $\mathrm{d}x$ 来应用热传导定律列出方程的。该定律本身仍是直接与温度的变化率——$T(x)$ 的导数有联系的，但分析仍用微元段来进行的，故仍称之为微元分析法。

现在我们研究在离 Q_1 端之距离长为 x 处、长度为 $\mathrm{d}x$ 的一个微元段中热量的传布情况。

按照假设温度函数仅与 x 有关，而与时间 t 是无关的，即我们所研究的传导过程是稳定的。

按热传导定律，在 dt 时间内，通过离杆端 Q_1 的距离为 x 的截面上的热量是

$$-\lambda AT'(x)\mathrm{d}t.$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内，通过离杆端 Q_1 的距离为 $x+\mathrm{d}x$ 的截面上的热量是

$$-\lambda AT'(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}t \approx -\lambda A[T'(x)+T''(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}t.$$

在介于这两个截面间的一段杆件中，由于热传导而在 dt 时间内得到的热量就是上面两个热量之差，即近似为

$$\lambda AT''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

在这同一段时间 $\mathrm{d}t$ 里，这一段杆件散于周围介质的热量损失为

$$\alpha P\mathrm{d}x(T(x)-T_3)\mathrm{d}t.$$

杆件 $\mathrm{d}x$ 段在 $\mathrm{d}t$ 时间里由热传导得到的热量应当等于它散发到介质中的热量，故可得关系式

$$\lambda AT''(x)\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\alpha P\mathrm{d}x\cdot[T(x)-T_3]\mathrm{d}t,$$

因为微元 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}t$ 是任意的，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\alpha P}{\lambda A}(T-T_3). \tag{16}$$

上式就是本例的数学模型，它是二阶线性常微分方程。它的一般解法的讨论请见第二章。下面用一种初等而简单的方法求解(16)。现令 $y=T-T_3$，$a^2=\alpha P/\lambda A$，则(16)成为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-a^2y=0 \tag{17}$$

在上式两边乘上 $2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-a^2y^2\right]=0, \tag{18}$$

所以

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-a^2y^2=C \quad (C\text{是常数}), \tag{19}$$

试取

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-ay=aC_1 \quad (C_1\text{是常数}), \tag{20}$$

与

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=aC_2 \quad (C_2\text{是常数}). \tag{21}$$

对(20)，令 $u=y+C_1$，得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=au$，把它改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{au},$$

积分之得到 $x=\frac{1}{a}(\ln|u|-\ln B)$，因此有 $u=B_1e^{ax}$。

对(21)，令 $v=y-C_2$，得 $\frac{dv}{dx}=-av$，再改写为

$$\frac{dx}{dv}=-\frac{1}{av},$$

积分之得到 $x=\frac{-1}{a}(\ln|v|-\ln B_2)$，因此有 $v=B_2e^{-ax}$。由方程(17)的线性性质知 e^{ax} 与 e^{-ax} 的线性组合仍然是(17)的解，故可得(17)的通解

$$y=C_1^*e^{ax}+C_2^*e^{-ax},$$

其中 C_1^* 与 C_2^* 均为任意常数。回到原来的未知函数得通解

$$T=T_3+C_1^*e^{ax}+C_2^*e^{-ax},$$

由条件 $T(0)=T_1$，$T(L)=T_2$，可以求得决定 C_1^* 与 C_2^* 的线性代数方程组

$$\begin{cases} C_1^*+C_2^*=T_1-T_3, \\ e^{aL}C_1^*+e^{-aL}C_2^*=T_2-T_3. \end{cases}$$

解之得

$$C_1^*=\frac{T_2-T_3-(T_1-T_3)e^{-aL}}{2\,\mathrm{sh}(aL)},$$

$$C_2^*=\frac{(T_1-T_3)e^{aL}-(T_2-T_3)}{2\,\mathrm{sh}(aL)}.$$

所以满足两端的温度约束条件的特解为

$$T=T_3+\frac{(T_2-T_3)\mathrm{sh}(ax)+(T_1-T_3)\mathrm{sh}(a(L-x))}{\mathrm{sh}(aL)} \tag{22}$$

三、模拟近似法

在生物、经济等学科的实践问题中，常要用模拟近似的方法来建立微分方程数学模型，这是因为生物、医学、经济中的一些现象的规律性

我们还不很清楚，即使有所了解也是极其复杂的，因此要用数学模型去研究它们时只能在不同的假设下去模拟实际的现象，这个过程当然是近似的，这样模拟近似所建立的微分方程从数学上求解或分析解的性质，再去同实际情况对比，看这个微分方程模型能否刻划、模拟、近似某些实际的现象。下面用几个例子来加以说明。

例 6 生物种群数的增长

生物总数（也包括人口总数）的预测是一个很重要的问题。但是任何生物种群数目是按整数变化的。但当种群的总数非常大时，种群数的少量变化与总数之比是很小的，这相当于在时间作微小变化时种群数也作小的变化。因此，我们近似地认为，当总数很大时，它是随时间连续地、甚至可微地变化。这时可取时间t为自变量，以种群数$N(t)$为未知函数。假定$r(t,N)$表示该种群出生率和死亡率之差，那末$N(t)$的增长率$N'(t)=r(t,N(t))$。如果生物种群是孤立的，可以近似地有$r(t,N)=aN(t)$，（a为常数），即

$$N'(t)=aN(t) \tag{23}$$

这是一个一阶线性常系数方程，它描述了马尔萨斯（Malthus）生物总数增长定律，马尔萨斯曾用来讨论人口问题。假定$N(t_0)=N_0$，则可以求得

$$N(t)=N_0e^{r(t-t_0)}. \tag{24}$$

显然，把$r(t, N)$视为N的线性函数是一种模拟近似。究竟它对哪些情况下的生物种群增长能够以较小误差来近似模拟呢？让我们看些实例。

1945 年克劳皮克（Crombic）作了一个人工饲养小谷虫的实验，在 10 克麦粒中养一对甲虫（小谷虫），每星期将麦粒过筛一次，又将新鲜麦粒补足到 10 克，这种程序可使食物资源大致不变，每两星期统计一次活的成虫的个数，得到如图1.13所示的曲线。当t较小时它与(24)式所画出的曲线是很符合的。但是对于大的t，由于当$t\to\infty$时有$N(t)\to\infty$，这显然是与实际情况不相符的。

若$N(t)$表示时间t时地球上的人口总数。据估计，在 1961 年地

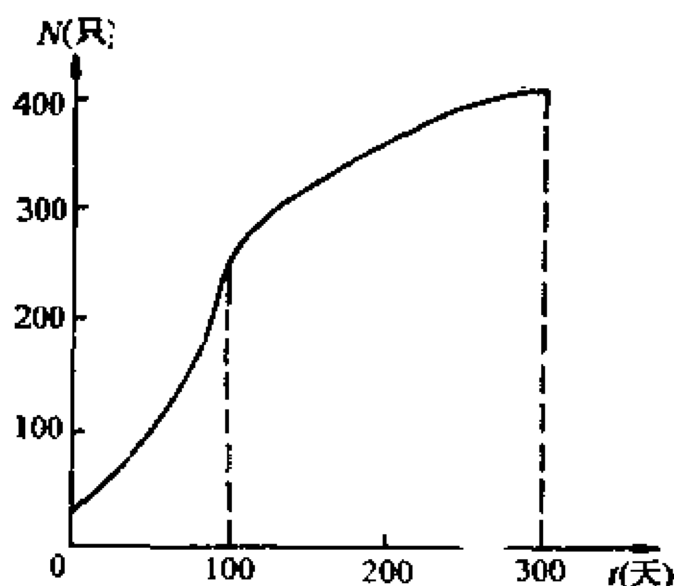


图 1.9

球上的人口总数是30.6亿(3.06×10^9)。在过去十年间人口按每年2%的速率增长着。因此 $t_0=1961, N_0=3.06\times10^9, a=0.02$，于是

$$N(t)=3.06\times10^9 e^{0.02(t-1961)}. \tag{25}$$

这个公式准确地反映了在1700—1961年期间的人口总数。在这期间地球上的人口大约每35年增加一倍，而由(25)式可得人口每34.6年增加一倍。为了证明这一点，记 $T=t-t_0$，得 $e^{0.02T}=2$，即 $0.02T=\ln 2$，故 $T=50\ln 2\approx34.6$。若以这种增长率计算，可以预测地球上的人口总数在2510年将是 2×10^{14}，在2635年将是 1.8×10^{15}，在2670年将是 3.6×10^{15}。这是一些天文数字，地球表面的总面积大约为 5.11×10^8 平方公里，即使80%的水面上也住人，则到2510年，平均每人仅有2.555平方米；到2635年，每人仅有0.28平方米，刚够立足，而到2670年，我们只好一个人站在另一个人的肩上排成两层了。由此可见对生物总数不太大时，线性的微分方程模型模拟近似是较好的；但生物总数非常大时，线性模型就不准确了。因为线性模型没有反映这样一个事实，即一个物种各个成员之间由于生活场所和可利用的自然资源和食物的有限在进行着竞争。一般地只有对低级的动物，例如细菌、酵母或浮游藻类比较吻合，如用于人口问题偏差就很大，需要修改

模拟的模型。

现在考虑有影响增长率的竞争项的模拟，把它取为 $-bN^2$，其中 b 是常数，因为单位时间内两个成员相遇次数的统计平均值与 N^2 成正比，所以把(23)修正为下述一阶非线性方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=aN-bN^2, \tag{26}$$

或

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=a-bN. \tag{27}$$

这个方程称为生物总数增长统计筹算律，常数 a 与 b 称为生物总数的生命系数。这个定律是荷兰数学生物学家弗胡斯特(Verhulst)首先发现的。一般地说，b 比 a 小得多，因此，若 N 不太大，则竞争项 $-bN^2$ 同 aN 相比可以略去，而生物总数按指数增长。但 N 很大时，竞争项就不能忽略，为求解方程(26)，可以将(26)改写为

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}N}{aN-bN^2}$$

积分之得

$$t-t_0=\frac{1}{a}\int_{N_0}^{N}\left(\frac{1}{r}+\frac{b}{a-br}\right)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{a}\ln\frac{N}{N_0}\left|\frac{a-bN_0}{a-bN}\right|,$$

因之，有

$$\mathrm{e}^{a(t-t_0)}=\frac{N(a-bN_0)}{N_0(a-bN)},$$

从而，得到

$$N(t)=\frac{aN_0}{bN_0+(a-bN_0)\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}}. \tag{28}$$

现在来研究函数(28)，当 $t\to\infty$ 时，有 $N(t)\to\frac{aN_0}{bN_0}=\frac{a}{b}$，可见不管初始条件如何，生物总数总是趋向于极限值 $\frac{a}{b}$。另外可看出，当 $0<N_0$

$<\frac{a}{b}$时，$N(t)$是时间 t 的单调递增函数，而且，因为

$$\frac{d^2N}{dt^2}=a\frac{dN}{dt}-2bN\frac{dN}{dt}=(a-2bN)N(a-bN),$$

所以，当$N(t)<\frac{a}{2b}$时，$\frac{dN}{dt}$是递增的，而当 $N(t)>\frac{a}{2b}$时，$\frac{dN}{dt}$

是递减的，现设 $N_0<\frac{a}{2b}$，函数 $N(t)$的图形见图 1.10，这种曲线称为统计筹算曲线或 S 形曲线。由图 1.10 可见，在生物总数达到其极限值的一半以前的时期，是加速生长时期。过这一点以后，生长的速率逐渐减小，并且迟早会达到零，这是减速生长时期。

上述这些结论，用来模拟真实的生物种群的总数的增长是比较准确的。

数学生物学家高斯(E.F.Gauss)进行的原生物草履虫实验证实了统计筹算律的模拟的准确性.把五个草履虫放在盛有 0.5 厘米^{3}营养液的小试管中，连续六天每天都数一数试管中草履虫的个数。他发现，当草履虫的个数较少时，以每天 230.9%的速率增长。起初草履虫的个数增长很快，后来慢下来了，直到第四天达到最高水平 375 个，充满整个试管。由这个实验，得到 $a=2.309$，$b=2.309/375$，$N(t)=375/(1+74e^{-2.309t})$，取 $t_0=0$，将上述统计筹算律求得的$N(t)$与实验数据对照(图 1.11 上用 ∘ 表示实际观察数据)是十分吻合的。

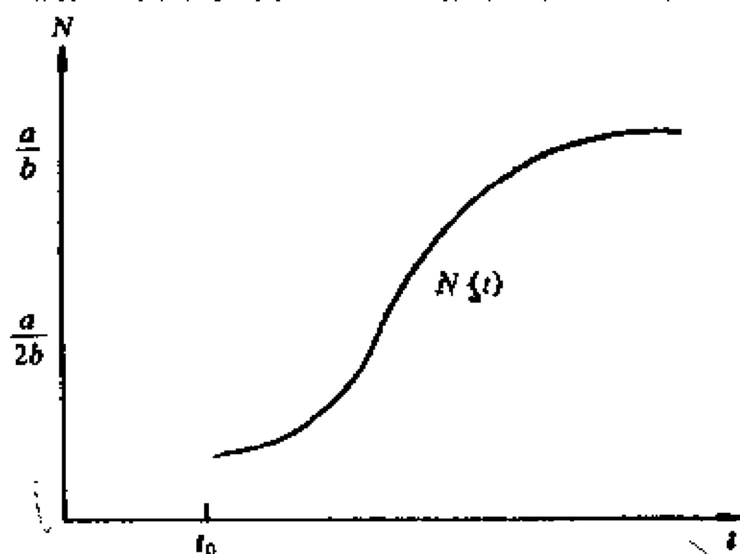


图 1.10

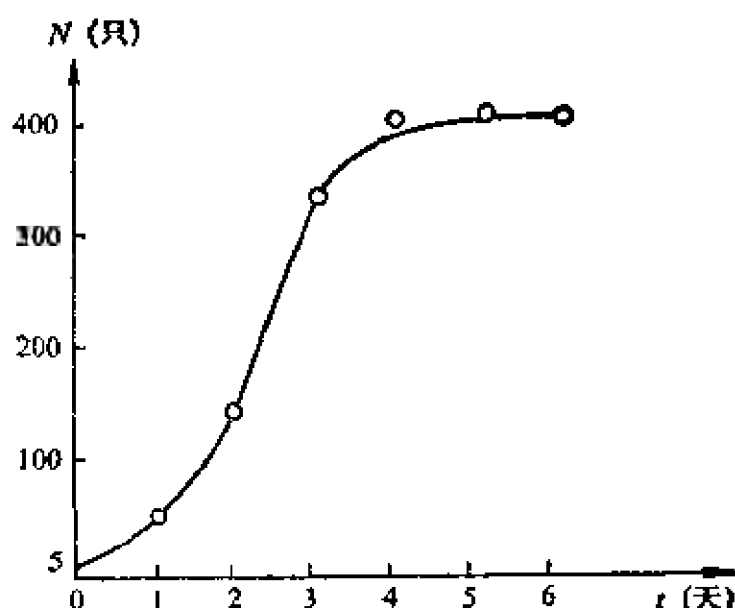


图 1.11

再来考察一下统计筹算律得到的地球上未来人口总数。生态学家估计 a 的自然值是 0.029。又知道，当人口总数为 3.06×10^9 时，年人口以 2%的速率增长着。从方程(26)易得

$$0.02 = 0.029 - b(3.06\times10^9),$$

因而 $b = 2.941\times10^{-12}$，又极限值

$$\frac{a}{b} = \frac{0.029}{2.941\times10^{-12}} = 9.86\times10^9.$$

根据此值与 1961 年人口比较，可见 1961 年仍处于曲线上加速增长的部分。

由此例可见，用模拟近似法所建立微分方程的模型与前两种方法相比有两点很重要，一是要把握住模拟的假设条件，对不同的假设条件可有不同模拟的方法，也就有不同的模型；二是要对由模拟的微分方程得到的解的特性进行分析，然后去与实际情况或实验对照，看结果是否一致，若一致或基本符合，则说明模拟是好的，由模拟建立的微分方程是适用的，否则就要修改微分方程模型。

例 7　市场价格形成的动态过程

对于纯粹的市场经济来说，商品市场价格取决于市场供需之间的

关系。作为一个最一般的也是最简单的经济规律来说，是要求市场价格能促使商品的供给与需求相等，这样的价格称为(静态)均衡价格。这就是说，如果不考虑商品价格形成的动态过程，那末商品的市场价格应能保证市场供需的平衡。

一般地说，实际的市场价格不会恰好等于均衡价格，而且价格也不会是静态的，而应该是时间t的函数，价格形成的过程往往是一个通过市场不断的自动调节使市场价格逐步趋于均衡价格的过程。具体地说，假设在某一时刻 t_0，有一非均衡价格 P_0，那末此时存在(正的或负的)供需差，此供需差促使价格变动。对新形成的价格又有新的供需差。如此不断调节，就构成市场价格形成的动态过程。现要求建立这个动态过程的微分方程数学模型。

解 上述问题是数理经济学中研究的基本问题之一。它不能像物理学中那样精确地建立模型，然后求得微分方程模型的解去准确地反映或预见一些物理的现象。对经济中的问题我们只能模拟近似地去建立数学模型，提出一些对规律的分析与假想，来建立模拟这个动态过程的微分方程，然后求得方程的解，回过头再去比较实际的动态情况与模拟情形理论的结果，以决定近似模型的好坏与决定是否采纳。和通常一样，以时间 t 为自变量，商品价格 $P(t)$ 为未知函数。我们现用一种简单的模拟近似：认为价格的变化正比于需求与供给之差。例如，对一种商品的情形，有方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\alpha[f(P,r)-g(P)], \tag{29}$$

其中 α 为正常数，r 为参数，表示消费者的收入，$f(P,r)$为需求函数，$g(P)$为供给函数。方程(29)是一阶非线性常微分方程。

现以线性的需求函数及供给函数为例。这时，方程(29)为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\alpha(-aP+b-CP+d)=-\alpha(a+C)P+\alpha(b+d) \tag{30}$$

其中 a,b,c,d 都是正常数。假定初始时刻 $t=0$ 时，$P(0)=P_0$。这是一个一阶线性常系数常微分方程。将(30)写成$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}P}$的形式，再积分之得

$$P(t)=\left(P_0-\frac{b+d}{a+c}\right)e^{-\alpha(a+c)t}+\frac{b+d}{a+c}. \qquad (31)$$

注意静态均衡价格$\bar{P}$应满足

$$-a\bar{P}+b=C\bar{P}-d,$$

即 $\bar{P}=(b+d)/(a+c)$。在（31）的两边取 $t\to+\infty$ 时的极限得 $P(t)\to\bar{P}$。

又若初始价格 $P_0=\bar{P}$，那末动态价格就维持在均衡价格 $\bar{P}$上，即整个动态过程转化为静态的。

由(30)所表示的市场动态结构为一级负反馈系统，即初始时的价格 P_0，若它大于 $\bar{P}$，则由于负指数，$P(t)$单调下降向 $\bar{P}$ 靠拢，若小于 $\bar{P}$，则 $P(t)$单调增加向 $\bar{P}$ 靠拢。对于满足 $\lim_{t\to\infty}P(t)=\bar{P}$的价格称为动态稳定价格。

若需求函数为非线性函数，则我们也可以求解描述价格形成的动态过程的微分方程，而且也可知随着时间的推移，物价将逐步趋向均衡价格。例如取 $f=5-P^2$，$g=P-1$，则有

$$\frac{dP}{dt}=\alpha(5-P^2-P+1)=\alpha(3+P)(2-P). \qquad (32)$$

初始条件仍旧设 $P(0)=P_0$。求解它，并能证明此解当 $t\to\infty$时，$P(t)\to2$。实际上由(32)右端等于零可以求得 $\bar{P}=2$，即随着时间的推移，价格越来越靠拢均衡价格 $\bar{P}=2$。

从以上的分析可知，我们用来模拟价格动态过程的一阶微分方程在一定程度上反映了价格影响需求与供给，而需求与供给反过来又影响价格的动态过程，并指出了动态价格逐渐向均衡价格靠拢的变化趋势。当然这个模拟的模型也有局限性，因为实际上商品生产需要时间，因而供给量往往是根据以前某时刻的价格作出的，例如供给函数为 $g(P(t-1))$，也就是说用延滞动态价格模型来模拟更为逼真，而对延滞的模型，则由于时间的延滞加上生产者对价格的过分敏感而造成了价格的不稳定性。可见价格的动态过程也就与我们讨论过的情形不同了。

§3 问题综述

本书要讨论常微分方程(组)的下述几方面的问题：

一、求分析形式的通解

对一些类型的常微分方程(组)，特别是线性的情形，我们能用某些方法求出方程(组)的通解，但是对相当多的类型的方程则不能求得分析形式的通解。本书将介绍一些能求得分析形式通解的方程类型以及具体的求解方法。

二、求初值问题或边值问题的特解

在所求得分析形式的通解中有一些任意常数，在前面一些例子中我们给出了确定这些任意常数的条件，这些条件称为定解条件，满足这些条件的解是定解问题的特解。在这里有两类定解问题最常见最重要。

(1) 初值问题

以一阶方程为例，我们考虑如下问题：求满足方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{1}$$

以及初始条件

$$x(t_0)=x_0 \tag{2}$$

的解，称之为一阶方程的初值问题，又称柯西(Cauchy)问题。

对二阶方程而言，我们考虑如下问题：求满足方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right) \tag{3}$$

以及初始条件

$$x(t_0)=x_0,\ x'(t_0)=x_0'\quad (x_0,\ x_0' \text{都是常数}) \tag{4}$$

的解，称之为二阶方程的初值问题。

对常微分方程组而言，我们考虑如下问题：求满足方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

以及初始条件

$$x_i(t_0)=x_{i0}\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

的解，称之为一阶常微分方程组的初值问题。

(2) 边值问题

主要对二阶线性微分方程讨论边值问题；它的提法是这样的：要求满足二阶方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=f(t), \tag{7}$$

以及边值条件(又称为两点边值条件)

$$x(a)=A,\ x(b)=B \tag{8}$$

的解。当然更一般地可以求满足二阶方程(7)以及边值条件

$$\begin{cases}\alpha_1x(a)+\alpha_2x'(a)=A\\ \beta_1x(b)+\beta_2x'(b)=B\end{cases} \tag{9}$$

的解，这里 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,A$ 和 B 都是常数。

三、讨论初值问题或边值问题的解的性质

除了具体求解初值问题或边值问题以外，还有一个重要内容就是从理论上讨论这两类定解问题解的存在性、唯一性等性质．本书因为主要讨论应用的背景、问题的归结以及微分方程解的求得或解的特性分析用于解释一些实际问题及用于解决实际问题，因此那些理论性比较强的部分我们就不作详细讨论了，只是对其论证方法作些简介．要注意的是上述两类定解问题的解的性质既有类似之处，也各有其特殊性。

四、近似数值解

随着电子计算机的普遍使用，使得不能用分析形式求解的方程绝大多数能用近似的方法，借助于电子计算机去求解——称之为数值解。这方面内容在本书仅作启发性的介绍。

五、定性理论及应用

这个内容也是本书讨论的主要问题之一，不通过求解，而仅通过微分方程本身来讨论解的性质。我们统称这种方法为定性方法。本书将讨论微分方程的奇点的类型与判别，平衡解（或称为平衡位置）的稳定性，周期解以及孤立的周期解——极限环等问题。

六、模型的归结以及应用实例分析

这部分内容是本书的一大特色。我们将力图把模型归结的三种方法通过实例给读者以较深刻的印象。又注意到模型的广泛性，既有常见的物理、力学、化学、控制论等方面的实例，也有近年来开始出现的生物、经济等方面的实例。这样可以使读者对常微分方程应用的广泛性有一个初步的认识。

习　　题

1．说明下列方程的阶、自变量和未知函数：

① $\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)$，　　② $\frac{dx}{dt}+P(t)x-Q(t)x^n$；

③ $\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=f(x)$；④ $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-4y=0$；

⑤ $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$；　　⑥ $\frac{d^3x}{dt^3}+2\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+2x=1$

其中 P,Q,f,a,b 是已知函数，n,g,l 是常数。

2．验证下列函数分别是所示方程的解：

① 函数 $x=Ce^{kt}$　　方程 $\frac{dx}{dt}-kx=0$；

② 函数 $x=Ce^{\int p(t)dt}$　　方程 $\frac{dx}{dt}=P(t)x$；

③ 函数 $x=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}$　　方程 $\frac{d^2x}{dt^2}-k^2x=0$；

④ 函数 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$;

其中 k 是某个确定的常数, C, C_1, C_2 是任意常数;

⑤ 函数 $x = te^t$, 方程 $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0$;

⑥ 函数 $x = \begin{cases} 0 & 当\ t \leqslant 0, \\ t^{3/2} & 当\ t > 0. \end{cases}$ 方程 $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$.

3. 试分别求出方程 $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2 - 1}$ 过点(0,1)及过点(2,1)的积分曲线。

4. 试求方程 $\frac{dx}{dt} = \mathrm{tg}\,t$ 过点(0,0)的积分曲线.

5. 一高温物体在20°C的恒温介质中冷却,设在冷却过程中降温速度与物体与介质之间的温度成正比,物体的初始温度为 u_0, 10分钟以后的温度为 u_1,求该物体在任意时刻 t 的温度。

6. 已知平面曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 (x, y) 的切线与坐标原点到这点的连线相交为定角 α, 求 $y(x)$ 适合的微分方程。

7. 已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求这曲线所适合的微分方程。

8. 根据实验,在一年里每克镭衰变0.44毫克, 经过多少年镭将衰变到原来数量的一半?

9. 光耗损于浅水层的数量与射入水中光的数量,水层的厚度成比例,厚度为35厘米的水层耗损射入光的一半。问厚度为2米的水层将耗损怎样一部分光。

10. 竖直放置的圆柱形水槽底部有一小孔,在5分钟内可流出全水槽水的一半, 在多长时间内流尽所有的水?

11. 设在某一种溶液中有两种物质,在反应开始时,两种物质的量分别为 a 与 b,又设在时间 t,两种物质已经起反应的量相等,且记为 x。利用化学反应的基本定律:反应进行的速率与尚未起反应的量的乘积成正比(比例系数为 k),求变量 x 随时间 t 的变化规律。

12. 设修架12米高水平截面为圆形的圆台状石桥墩,桥墩的载荷为 $P = 90$ 吨(本身重量另外), 材料的密度 $\rho = 2.5$ 吨/米^3。容许压力 $k = 300$ 吨/米^2。求桥墩的上底与下底的面积以及轴截面的形状(即需求出由通过轴的平面与桥墩石

截所得的外形曲线)。先求出$S(x)$的微分方程——用微元分析法，截面面积S是高度x的函数$S(x)$。然后求出底面积S_1，最后求出轴截面的曲线方程。

13. 火箭在贮满燃料时的质量为M，未贮燃料时的质量为m，从火箭喷出燃烧物的速度等于C，火箭的初速度为零，求出燃料燃烧以后火箭的速度，重力和空气阻力略去不计。

第二章　线性常系数微分方程

本章讨论线性常系数微分方程的求解问题，主要方法是把微分方程的求解问题化为特征方程——代数方程的求根问题。

§1　一阶常系数线性方程

我们讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+ax=0 \tag{1}$$

及

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+ax=f(t) \tag{2}$$

其中 a 为常数，$f(t)$为 t 的已知连续函数。

设(1)有形如 $x=\mathrm{e}^{\lambda t}$ 的解，其中 λ 为待定系数．将这形式的解代入(1)即得

$$\lambda+a=0.$$

此式称为(1)的特征方程，解得 $\lambda=-a$，所以(1)有通解

$$x=C\mathrm{e}^{-at},$$

其中 C 为任意常数。

若初值条件为

$$x(t_0)=x_0, \tag{3}$$

则初值问题(1)与(3)的解为

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}. \tag{4}$$

对于方程(2)的求解可用常数变易法．将(1)的通解中的任意常数 C 用待定函数 $C(t)$ 代替，即设(2)有形如

$$x = C(t)\mathrm{e}^{-at}$$

的解，将它代入(2)得 $C(t)$ 满足方程

$$C'(t)\mathrm{e}^{-at} - aC(t)\mathrm{e}^{at} + aC(t)\mathrm{e}^{at} = f(t),$$

即

$$C'(t) = \mathrm{e}^{at}f(t).$$

所以方程(2)的通解为

$$x = [C + \int \mathrm{e}^{at}f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{e}^{-at},$$

其中 C 是常数，且(2)的全部解也是上述形式(留给读者证明)。我们注意到$C\mathrm{e}^{-at}$是齐次方程(1)的通解，而 $\mathrm{e}^{-at}\int \mathrm{e}^{at}f(t)\mathrm{d}t$ 是非齐次方程(2)的特解。初值问题(2)与(3)的解为

$$x = \mathrm{e}^{-a(t-t_0)}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{a(\xi-t)}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]. \tag{5}$$

对于线性方程(1),(2)有下面两个称为*线性叠加原理*的性质：

线性叠加原理 1 若 $\varphi_1(t)$ 与$\varphi_2(t)$ 是方程(1)的解，则对任意常数 C_1与 C_2, $C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$ 仍然是(1)的解。

线性叠加原理 2 若 $\psi_i(t)(i-1,2)$分别是方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + ax = f_i(t) \quad (i = 1,2),$$

的解，又设 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, $\varphi(t)$ 是方程(1)的所有解，则$x = \varphi(t) + \psi_1(t) + \psi_2(t)$是(2)的全部解。

证明是容易的，留给读者作为练习。线性叠加原理对线性方程是有普遍性的。以后我们还将提到。

例 1 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = \mathrm{e}^{t} + 1. \tag{6}$$

解 对应的齐次方程的通解是 $C\mathrm{e}^{-3t}$,而(6)的特解是

$$\mathrm{e}^{-3t}\int \mathrm{e}^{3t}(\mathrm{e}^{t}+1)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-3t}\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{3}.$$

故(6)的通解为

$$x = Ce^{-3t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{3},$$

其中 C 是任意常数。

下面仍以这个例子来说明一些其它的解法。

① 凑全微分的方法

方程(6)对应的齐次方程是

$$\frac{dx}{dt} + 3x = 0, \tag{7}$$

在上式两边乘上 e^{3t} 得

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}x) = 0,$$

因此，

$$e^{3t}x = C.$$

故齐次方程(7)的通解为 $x = Ce^{-3t}$.

将此方法用于非齐次方程(6)得

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}x) = e^{3t}(e^t + 1),$$

$$e^{3t}x = \int e^{3t}(e^t + 1)dt + C,$$

$$x = e^{-3t}\left[\int e^{3t}(e^t + 1)dt + C\right]$$

$$= Ce^{-3t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{3}.$$

② 对特殊的非齐次右端函数，可以用待定系数法．先对方程

$$\frac{dx}{dt} + 3x = e^t$$

找形如 $x = Ae^t$ 的特解，其中 A 为待定系数，将之代入方程得 $A + 3A = 1$，故 $A = \frac{1}{4}$，所以

$$x_{1特}=\frac{1}{4}e^{t},$$

再对方程

$$\frac{dx}{dt}+3x=1$$

找形如 $x=B$ 的特解，其中 B 为待定的数，得 $3B=1$，即 $B=\frac{1}{3}$，所以

$$x_{2特}=\frac{1}{3}.$$

由解的线性叠加原理得

$$x_{特}=\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{3}.$$

故(6)的通解为

$$x=Ce^{-3t}+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{3}.$$

例 2 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+2x=1+e^{-2t}, & (8)\\ x(0)=1. & (9)\end{cases}$$

解 方程(8)的通解为

$$x=Ce^{-2t}+e^{-2t}\int e^{2t}(1+e^{-2t})\,dt$$

$$=Ce^{-2t}+\frac{1}{2}+te^{-2t},$$

其中 C 是任意常数，由初值条件(9)得 $1=C+\frac{1}{2}$，即 $C=\frac{1}{2}$. 所以初值问题(8)，(9)的解是

$$x=\frac{1}{2}\quad{}^{t}+\frac{1}{2}+te^{-2t}.$$

§2 二阶常系数线性方程

讨论如下形式的二阶线性方程:齐次方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0, \tag{1}$$

与非齐次方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t), \tag{2}$$

初始条件为

$$x(t_0)=x_0,\ x'(t_0)=x_0', \tag{3}$$

其中 a_1,a_0,x_0,x_0' 都是实数,$f(t)$ 是已知函数。

一、二阶齐次常系数线性方程的求解

将形如 $e^{\lambda t}$ 的解代入(1)得特征方程

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0, \tag{4}$$

这是一个一元二次方程,特征根(即这个二次方程的根)有下述三种情况:

(i) 两个相异的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1\neq\lambda_2$;

(ii) 两个相同的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1=\lambda_2$;

(iii) 一对共轭复根 $\alpha+i\beta,\alpha-i\beta(\beta\neq0)$。

对应于这三种情形,分别有如下三个结果。

定理 1 若(1)的特征方程(4)有两个相异的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1\neq\lambda_2$,则

$$x=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t} \tag{5}$$

是方程(1)的全部解,其中 C_1 与 C_2 是任意实常数。

证 首先 e^{λ_1t} 与 e^{λ_2t} 都满足方程(1),由线性叠加原理得函数(5)也是(1)的解。其次来说明(5)是(1)的全部解,即要证明,对(1)的任意解 $x(t)$,存在常数 C_1 与 C_2 使

$$x(t)=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}.$$

将方程(1)改写为

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{dx(t)}{dt}+\lambda_1\lambda_2x(t)=0,$$

即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_1x(t)\right)-\lambda_2\left(\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_1x(t)\right)=0,$$

令$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_1x(t)$，则有$\frac{dy(t)}{dt}-\lambda_2y(t)=0$，所以存在常数$C_2'$使

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_1x(t)=C_2'e^{\lambda_2t}.$$

又方程(1)也可改写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_2x(t)\right)-\lambda_1\left(\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_2x(t)\right)=0.$$

令$z(t)=\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_2x(t)$，则有$\frac{dz(t)}{dt}-\lambda_1z(t)=0$，所以存在常数$C_1'$使

$$z(t)=\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_2x(t)=C_1'e^{\lambda_1t}.$$

注意到

$$\begin{aligned}y(t)-z(t)&=\left(\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_1x(t)\right)-\left(\frac{dx(t)}{dt}-\lambda_2x(t)\right)\\&=(\lambda_2-\lambda_1)x(t)\\&=C_2'e^{\lambda_2t}-C_1'e^{\lambda_1t},\end{aligned}$$

因之，有

$$x(t)=\frac{C_1'}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1t}+\frac{C_2'}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2t}.$$

取　$C_1=C_1'/(\lambda_1-\lambda_2)$，$C_2=C_2'/(\lambda_2-\lambda_1)$，即得

$$x(t)=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}.$$

这里已用到本章 §1 中关于一阶线性常系数方程全部解的形式之结果。

定理 2 若(1)的特征方程(4)有两个相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2$，则

$$x=(C_1+C_2t)e^{\lambda_1 t} \tag{6}$$

是方程(1)的全部解，这里 C_1 与 C_2 是任意实常数。

证 与定理 1 的证明类似可得证，对(1)的任意解 $x(t)$，存在常数 C_2 使

$$y=\frac{dx}{dt}-\lambda_1 x=C_2e^{\lambda_1 t}.$$

在上式两边乘上 $e^{-\lambda_1 t}$ 得

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda_1 t}x)=C_2,$$

故存在常数 C_1 使 $e^{-\lambda_1 t}x(t)=C_2t+C_1$，即有

$$x(t)=(C_1+C_2t)e^{\lambda_1 t}.$$

定理 3 若(1)的特征方程(4)有两个共轭复根 $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta(\beta\neq 0)$，则

$$x=(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t)e^{\alpha t} \tag{7}$$

是(1)的全部实解，其中 C_1,C_2 是任意实常数。

证 1° 此时特征方程(4)可以写成

$$\lambda^2-2\alpha\lambda+(\alpha^2+\beta^2)=0,$$

故可将原方程(1)改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\alpha\frac{dx}{dt}+(\alpha^2+\beta^2)x=0.$$

2° 令 $y=xe^{-\alpha t}$，即 $x=e^{\alpha t}y$，于是

$$\frac{dx}{dt}=\alpha e^{\alpha t}y+e^{\alpha t}\frac{dy}{dt}=e^{\alpha t}\left(\frac{dy}{dt}+\alpha y\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\alpha e^{\alpha t}\left(\frac{dy}{dt}+\alpha y\right)+e^{\alpha t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=e^{\alpha t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+2\alpha\frac{dy}{dt}+\alpha^2y\right),$$

从而(1)可以改写为

$$e^{\alpha t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+2\alpha\frac{dy}{dt}+\alpha^2 y\right)-2\alpha e^{\alpha t}\left(\frac{dy}{dt}+\alpha y\right)+e^{\alpha t}(\alpha^2+\beta^2)y$$
$$=0,$$

即

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\beta^2 y=0,$$

3° 令 $y=z\sin\beta t$,则

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dt}\sin\beta t+z\cdot\beta\cos\beta t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}\sin\beta t+\frac{dz}{dt}\cdot 2\beta\cos\beta t-z\beta^2\sin\beta t,$$

从而

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\beta^2 y=\frac{d^2z}{dt^2}\sin\beta t+\frac{dz}{dt}\cdot 2\beta\cos\beta t=0,$$

再令 $u=\frac{dz}{dt}$, 得

$$\frac{du}{dt}\sin\beta t+u\cdot 2\beta\cos\beta t=0.$$

两边乘 $\sin\beta t$,把方程写成全微分形式

$$\frac{d}{dt}[u\sin^2\beta t]=0,$$

于是

$$u=C_1'\frac{1}{(\sin\beta t)^2},$$

即

$$\frac{dz}{dt}=C_1'\frac{1}{(\sin\beta t)^2},$$

其中 C_1' 是常数,积分之得

$$z=C_1'\int \operatorname{cse}^2\beta t\,dt=-\frac{C_1'}{\beta}\operatorname{ctg}\beta t+C_2',$$

其中 C_2' 是常数，所以

$$y = z\sin\beta t = \frac{C_1'}{\beta}\cos\beta t + C_3'\sin\beta t,$$

取 $C_1 = C_1'/\beta, C_2 = C_2'$，得到

$$x = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t).$$

例 1 求解方程 $$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

解 对应特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$，它有两个相异实特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$，所以原方程的全部解为

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t},$$

其中 C_1, C_2 为任意实常数。

例 2 求解方程 $$x'' + 2x' + x = 0.$$

解 对应特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$，它有两个相同的实特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，所以原方程的全部解为

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-t}.$$

例 3 求解方程 $$x'' - 2x' + 5x = 0.$$

解 对应特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$，它有一对共轭复根 $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$，所以原方程的全部解为

$$x = (C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)e^t.$$

同一阶方程一样，寻求满足方程(1)以及初值条件(3)的解，称为求解初值问题。

定理 4 二阶常系数线性方程(1)，(3)的初值问题的解存在且唯一。

证 由于方程(1)的特征方程的根有三种情况，对于每种情形前面三个定理分别给出了全部解的表示式。利用初始条件(3)可以唯一确定表达式中的常数 C_1 与 C_2（留给读者作为习题加以证明），可见初值问题(1)，(3)的解存在且唯一。

二、二阶非齐次常系数线性方程的求解

定理 5 设 $K(t)$ 是相应于(2)的齐次方程(1)及初始条件

$$K(0) = 0, \dot{K}(0) = 1$$

的解，则方程(2)有特解

$$\tilde{x}(t)=\int_0^t K(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

证 注意到

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t}=K(0)f(t)+\int_0^t \frac{\mathrm{d}K(t-s)}{\mathrm{d}t}f(s)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_0^t \frac{\mathrm{d}K(t-s)}{\mathrm{d}t}f(s)\mathrm{d}s,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{x}}{\mathrm{d}t^2}=\dot{K}(0)f(t)+\int_0^t \frac{\mathrm{d}^2K(t-s)}{\mathrm{d}t^2}f(s)\mathrm{d}s$$

$$=f(t)+\int_0^t \frac{\mathrm{d}^2K(t-s)}{\mathrm{d}t^2}f(s)\mathrm{d}s,$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{x}}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t}+a_0\tilde{x}$$

$$=f(t)+\int_0^t\left[\frac{\mathrm{d}^2K(t-s)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}K(t-s)}{\mathrm{d}t}+a_0K(t-s)\right]f(s)\mathrm{d}s$$

$$=f(t).$$

即 $\tilde{x}(t)$是方程(2)的特解．这里用到 $K(t-s)$ 关于 t 满足齐次方程(1)这一事实．

关于$K(t)$的具体形式可以给出如下：

(i) 设特征方程(4)有两个相异实根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1\neq\lambda_2$，则

$$K(t)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}; \tag{9}$$

(ii) 设特征方程(4)有两重实根 $\lambda_1=\lambda_2$，则

$$K(t)=t\mathrm{e}^{\lambda_1 t}; \tag{10}$$

(iii) 设特征方程(4)有一对共轭复根 $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$, $\lambda_2=\alpha-\mathrm{i}\beta(\beta\neq$ (10)，则

$$K(t)=\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t. \tag{11}$$

以上结果请读者自行证明。

对二阶非齐次线性方程的全部解易知有

定理 6 设 $\tilde{x}(t)$ 为(8)所定义的方程(2)的特解，$x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 是在特征方程(4)取三种情形时分别对应的解（$e^{\lambda_1 t}$，$e^{\lambda_2 t}$ 或 $e^{\lambda_1 t}$，$te^{\lambda_1 t}$ 或 $e^{\alpha t}\cos\beta t$，$e^{\alpha t}\sin\beta t$），则方程(2)的全部解为

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\tilde{x}(t) \tag{12}$$

其中 C_1 与 C_2 是任意常数。

例 4 求解方程 $x''-3x'+2x=1$。

解 根据定理 5 及(9)可求得它有特解

$$\tilde{x}=\int_0^t\left[e^{2(t-s)}-e^{(t-s)}\right]ds$$

$$=\frac{1}{2}-e^t+\frac{1}{2}e^{2t},$$

故通解为 $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+\dfrac{1}{2}$。

实际上，可用待定系数法即比较系数法求非齐次方程的特解，令 $x=A$（A 为待定常数），代入方程得 $2A=1$，即 $A=\dfrac{1}{2}$，故有特解 $\tilde{x}=\dfrac{1}{2}$。可见当非零自由项 $f(t)$ 取特殊形式时，用带 $K(t)$ 型的积分计算特解一般说来较繁，而用比较系数法要容易些。

例 5 求解方程 $x''+2x'+x=e^{-t}$。

解 由定理 5 及(10)易求得它有特解

$$\tilde{x}=\int_0^t(t-s)e^{-(t-s)}e^{-s}ds$$

$$=e^{-t}\int_0^t(t-s)ds$$

$$=\frac{1}{2}t^2e^{-t},$$

通解为

$$x=(C_1+C_2t)e^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

注意此时若用待定系数法，则假设的特解必须是 At^2e^{-t} 形式的函数(A 是待定常数)，也能求得$A=\frac{1}{2}$，但这时的运算不见得比用 $K(t)$型的积分容易。

例 6 求方程 $x''+\omega_0^2x=A\sin\omega t$ 的解，这里ω_0，ω，A 都是正常数。

解 它的特征方程为 $\lambda^2+\omega_0^2=0$，有一对纯虚根 $\lambda_1=i\omega_0$，$\lambda_2=-i\omega_0$。

(i) 设 $\omega\neq\omega_0$，由定理 5 及(11)易求得方程的特解

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=\int_0^t\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0(t-s)\cdot A\sin\omega s\,\mathrm{d}s\\&=\frac{A}{\omega_0}\left\{\frac{-1}{2(\omega_0+\omega)}\sin[\omega_0(t-s)-\omega s]\Big|_0^t\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{2(\omega-\omega_0)}\sin[\omega_0(t-s)+\omega s]\Big|_0^t\right\}\\&=\frac{A}{\omega_0}\left\{\frac{1}{2(\omega_0+\omega)}(\sin\omega t+\sin\omega_0 t)\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2(\omega_0-\omega)}(\sin\omega t-\sin\omega_0 t)\right\}\\&=\frac{A}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t,\end{aligned}$$

所以方程的通解为

$$x=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t+\frac{A}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t,$$

其中 C_1 与 C_2 为任意常数。

(ii) 设 $\omega=\omega_0$，易求得方程的特解

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=\int_0^t\frac{1}{\omega_0}\sin\omega(t-s)A\sin\omega s\,\mathrm{d}s\\&=\frac{A}{\omega_0}\left[\frac{1}{2\omega}\sin\omega t-\frac{t}{2}\cos\omega t\right],\end{aligned}$$

所以方程的通解为

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{A}{2\omega_0} t \cos \omega t.$$

此例也可以用待定系数法求特解，例如对 $\omega \neq \omega_0$ 情形，令特解取为形式：$x = B\cos\omega t + C\sin\omega t$，其中 B 与 C 是任意常数。将之代入方程，由于

$$x' = -\omega B \sin \omega t + \omega C \cos \omega t,$$
$$x'' = -\omega^2 B \cos \omega t - \omega^2 C \sin \omega t.$$

所以

$$A \sin \omega t = x'' + \omega_0^2 x = -\omega^2 B \cos \omega t - \omega^2 C \sin \omega t + \omega_0^2 B \cos \omega t + \omega_0^2 C \sin \omega t.$$

由上式比较系数得

$$B = 0, A = C \cdot (\omega_0^2 - \omega^2),$$

所以有特解

$$x = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

对 $\omega = \omega_0$ 情形，特解不能假设为 $B\cos\omega t + C\sin\omega t$ 形式，因为它实际上就是齐次方程的通解中的形式。现须设特解为 $t(B\cos\omega t + C\sin\omega t)$ 的形式，将之代入原方程得

$$B = \frac{A}{2\omega_0}, \quad C = 0.$$

习　题

1. 求下列方程的全部解：

① $R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = V\omega \cos \omega t$,

这里 R, C, V, ω 均为实常数；

② $\frac{dy}{dx} + 3y = 1 + x$;

③ $\frac{dx}{dt} - 2x = e^{2t} + \sin t$;

④ $\frac{dx}{dt} - 2x = te^{2t} + e^{-t}$。

2．解下列线性齐次方程：

① $y'' + y' - 2y = 0$；

② $y'' + 4y' + 3y = 0$；

③ $y'' - 2y' = 0$；

④ $2y'' - 5y' + 2y = 0$；

⑤ $y'' - 4y' + 5y = 0$；

⑥ $y'' + 2y' + 10y = 0$；

⑦ $y'' + 4y = 0$；

⑧ $y'' - 2y' + y = 0$。

3．解下列线性非齐次方程：

① $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$；

② $y'' + y = 4xe^{x}$；

③ $y'' - y = 2e^{x} - x^{2}$；

④ $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$；

⑤ $y'' - 3y' + 2y = \sin x$；

⑥ $y'' + y = 4\sin x$；

⑦ $y'' - 5y' + 4y = 4x^{2}e^{2x}$；

⑧ $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$；

⑨ $y'' + y = x\sin x$；

⑩ $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$；

⑪ $y'' - 5y' = 3x^{2} + \sin 5x$。

4．用常数变易法求解下列方程：

① $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$；

② $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{x} + 1}$；

③ $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{x}$；

④ $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x + 1}$。

5．求解下列方程的初值问题：

① $y''-2y'+y=0$，$y(2)=1$，$y'(2)=-2$；

② $y''+y=4e^{x}$，$y(0)=4$，$y'(0)=-3$；

③ $y''-2y'=2e^{x}$，$y(1)=-1$，$y'(1)=0$；

④ $y''+2y'+2y=xe^{-x}$，$y(0)=y'(0)=0$.

6．说明怎样的 a 与 b 使方程 $y''+ay'+by=0$ 的解具有下列特征：

① 所有的解当 $x\to+\infty$ 时都趋于零；

② 所有的解在整个实轴 $-\infty<x<+\infty$ 上都是有界的；

③ 至少有一个解 $y(x)\neq0$，当 $x\to+\infty$ 时趋于零；

④ 每一个解($y(x)\equiv0$ 除外)的绝对值从某个 x 开始都是单调递增的；

⑤ 每一个解都在 x 的无穷点集上为零.

7．对于怎样的 k 和 ω，方程 $y''+k^2y=\sin\omega t$ 至少有一个周期解？

8．求出方程 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=\sin\omega t$ 的周期解.

9．设函数 $f(t)$ 是周期为 ω 的连续函数，证明微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+x=f(t),$$

当 $\beta\neq0$ 时有且仅有一个周期为 ω 的解，并求出它的表达式.

10．设函数 $f(t)$ 在区间 $-\infty<t<+\infty$ 上连续，试求微分积分方程

$$\frac{dx}{dt}+2x(t)+\int_0^t x(s)ds=f(t)$$

的全部解，并给出确定唯一解的初值条件.

§3 n 阶常系数线性方程

一、n 阶齐次常系数线性方程的求解

现在考虑如下形式的方程

$$L_n(x)\equiv\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0 \qquad (1)$$

这里 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 都是实数. 将形如 $e^{\lambda t}$ 的解代入(1)得

$$e^{\lambda t}(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)=0,$$

从而有

$$\Delta(\lambda)\equiv\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0. \qquad (2)$$

它是 n 次代数方程，称为微分方程(1)的特征方程。根据 n 次代数方程的根的分布，可以设(2)有 j 个不同的实根 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_j$，它们的重数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_j$，还有 k 对不同的共轭复根 $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \cdots, \alpha k \pm i\beta k$，它们的重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_k$，且

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_j + 2(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = n.$$

定理 1 若特征方程(2)有上面假设的特征根的分布，微则分方程(1)的任意一个实解均可表示为

$$\begin{aligned} x = & P_1(t)e^{\mu_1 t} + \cdots + P_j(t)e^{\mu_j t} \\ & + (Q_1(t)\cos\beta_1 t + R_1(t)\sin\beta_1 t)e^{\alpha_1 t} + \cdots + \\ & + (Q_k(t)\cos\beta_k t + R_k(t)\sin\beta_k t)e^{\alpha_k t}. \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $P_1(t)$，$P_2(t)$，$\cdots$，$P_j(t)$ 是次数分别为 $n_1 - 1$，$n_2 - 1$，$\cdots$，$n_j - 1$ 的实系数多项式，$Q_l(t)$ 和 $R_l(t)(l = 1, 2, \cdots)$ k，都是 $m_l - 1$ 次实系数多项式。

证 我们仅就最简单的两种情形加以证明，一般情形的证明留给读者自行完成。

第一种情形，设特征方程(2)有 n 个不同的实特征根 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$。

1° 设特征方程(2)有如下的因式分解式：

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = (\lambda - \mu_n)(\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots \\ + b_1\lambda + b_0) \end{aligned}$$

即有

$$a_{n-1} = b_{n-2} \quad \mu_n, \qquad a_{n-2} = b_{n-3} - b_{n-2}\mu_n, \cdots,$$
$$a_1 = b_0 - b_1\mu_n, \qquad a_0 = -b_0\mu_n,$$

置

$$L_n x \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x,$$
$$L_{n-1}x \equiv \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + b_{n-2}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \cdots + b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x.$$

若 $x(t)$ 具有 n 阶连续导函数，则

$$L_{n-1}\left(\frac{dx}{dt} - \mu_n x\right) \equiv L_n x.$$

事实上有

$$L_{n-1}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\mu_n x\right)$$

$$\equiv\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\mu_n x\right)+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}t^{n-2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\mu_n x\right)+\cdots$$

$$+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\mu_n x\right)+a_0\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\mu_n x\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+(b_{n-2}-\mu_n)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+(b_{n-3}-b_{n-2}\mu_n)\frac{\mathrm{d}^{n-2}x}{\mathrm{d}t^{n-2}}$$

$$+\cdots+(b_0-b_1\mu_n)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+(-b_0\mu_n)x$$

$$=\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0 x\equiv L_n x.$$

2° $n=1$ 时，定理成立；$n=2$ 时定理也成立。对一般的 n，用数学归纳法。设定理对 $n-1$ 阶方程成立，要证对 n 阶方程也成立。设 $x(t)$ 是 $L_n x=0$ 的任意一个解，若置 $y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}-\mu_n x(t)$，则 $L_{n-1}y(t)=0$,后一方程的特征方程是

$$\widetilde{\Delta}=\lambda^{n-1}+b_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+b_1\lambda+b_0,$$

它有特征根 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n-1}$，由定理的结论知道存在常数 $C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}$ 使

$$y(t)=C_1\mathrm{e}^{\mu_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\mu_2 t}+\cdots+C_{n-1}\mathrm{e}^{\mu_{n-1}t},$$

因此，

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}-\mu_n x(t)=C_1\mathrm{e}^{\mu_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\mu_2 t}+\cdots+C_{n-1}\mathrm{e}^{\mu_{n-1}t},$$

上式两边乘上 $\mathrm{e}^{-\mu_n t}$ 得

$$\mathrm{e}^{-\mu_n t}\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}-\mu_n x(t)\right)=C_1\mathrm{e}^{(\mu_1-\mu_n)t}+\cdots+C_{n-1}\mathrm{e}^{(\mu_{n-1}-\mu_n)t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\mu_n t}x(t)]=C_1\mathrm{e}^{(\mu_1-\mu_n)t}+\cdots+C_{n-1}\mathrm{e}^{(\mu_{n-1}-\mu_n)t},$$

故存在常数 C'_n 使

$$e^{-\mu_n t}x(t)=C'_1e^{(\mu_1-\mu_n)t}+\cdots+C'_{n-1}e^{(\mu_{n-1}-\mu_n)t}+C'_n,$$

这里 $\quad C'_i=C_i/(\mu_i-\mu_n)\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$，因此有

$$x(t)=C'_1e^{\mu_1 t}+\cdots+C'_{n-1}e^{\mu_{n-1}t}+C'_ne^{\mu_n t},$$

即证得定理对 n 阶方程也成立。

第二种情形，设特征方程(2) 有特征根 μ_1，它的重数为 n。又设 $x(t)$是 $L_nx=0$ 的任意一个解，令 $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}-\mu_1x(t)$，与第一种情形证明类似可得

$$L_nx(t)=L_{n-1}y(t).$$

定理对 $n=1$ 与 $n=2$ 情形成立，可用数学归纳法证定理对任意n成立，设定理对 $n-1$ 成立，即存在常数 $C'_1,C'_2,\cdots,C'_{n-1}$ 使

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt}-\mu_1x(t)=(C'_1+C'_2t+\cdots+C'_{n-1}t^{n-2})e^{\mu_1 t},$$

两边乘上 $e^{-\mu_1 t}$ 得

$$e^{-\mu_1 t}\left(\frac{dx(t)}{dt}-\mu_1x(t)\right)=C'_1+C'_2t+\cdots+C'_{n-1}t^{n-2},$$

即

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mu_1 t}x(t))=C'_1+C'_2t+\cdots+C'_{n-1}t^{n-2},$$

故存在常数 C_1 使

$$e^{-\mu_1 t}x(t)=C_1+C'_1t+\frac{C'_2}{2}t^2+\cdots+\frac{C'_{n-1}}{n-1}t^{n-1},$$

因此有

$$x(t)=(C_1+C_2t+\cdots+C_nt^{n-1})e^{\mu_1 t},$$

其中 $C_j=C'_{j-1}/(j-1)\quad(j=2,\cdots,n)$，故定理对 n 阶方程也成立。

例 1 求微分方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}-2\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}+2x=0$$

的全部解。

解 特征方程是 $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=0$，特征根是 2，1，-1，并且都是单重根。由定理 1 得微分方程的全部解是 $x=C_1e^{2t}+C_2e^{t}+C_3e^{-t}$，其中 C_1,C_2,C_3 是三个任意常数。

例 2 求微分方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}+x=0$$

的全部解。

解 特征方程是 $\lambda^3+1=0$，特征根为 -1，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，和 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，并且都是单根，由定理 1 得方程的全部解是

$$x=C_1e^{-t}+\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{t},$$

其中 C_1,C_2,C_3 是三个任意常数。

例 3 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^3x}{dt^3}-3\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}-x=0,\\ x(0)=0,\dot{x}=0,\ \ddot{x}(0)=1.\end{cases}$$

解 特征方程是 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3=0$，它有一个三重根 1，由定理 1 得方程的全部解是

$$x=(C_1+C_2t+C_3t^2)e^{t},$$

其中 C_1,C_2,C_3 是任意常数。由三个初值条件得

$$x(0)=C_1=0,\ \dot{x}(0)=C_1+C_2=0,\ddot{x}(0)=C_1+2C_2+2C_3=1,$$

所以 $C_1=0,C_2=0,\ C_3=\frac{1}{2}$，所要求的初值问题的解为

$$x=\frac{1}{2}t^2e^{t}.$$

例 4 求微分方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$$

的全部解。

解 特征方程是 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$，即 $(\lambda^2+1)^2=0$，故特征根有两个 $\lambda_1=\mathrm{i}$，$\lambda_2=-\mathrm{i}$，且都是两重根，由定理1得该方程的全部解是

$$x=(C_1+C_2t)\cos t+(C_3+C_4t)\sin t,$$

其中 C_1,C_2,C_3,C_4 为任意常数。

二、n 阶非齐次常系数线性方程

现在考虑 n 阶非齐次常系数线性方程

$$L_nx=\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=f(t),\qquad(4)$$

其中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 都是常数．$f(t)$ 在开区间 (α,β) 内是已知的连续函数．关于(4)的特解，有如下结果．

定理2 设 $K(t)$ 是(4)对应的齐次方程(1)的解，并且满足初值条件

$$K(0)=\dot{K}(0)=\cdots=K^{(n-2)}(0)=0,K^{(n-1)}(0)=1,\qquad(5)$$

则

$$\tilde{x}(t)=\int_0^t K(t-s)f(s)\mathrm{d}s\qquad(6)$$

是非齐次方程(4)的解。

证明与上节定理5的证明相似，故略去。

(4)的特解表达式(6)是由§2中二阶线性非齐次方程的特解公式类比而得的．同样对线性非齐次方程有

定理3 线性非齐次常系数方程(4)的全部解是

$$x(t)=\varphi(t)+\int_0^t K(t-s)f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\varphi(t)$ 是(4)对应的齐次方程(1)的全部解．

例5 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}-2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=1+\mathrm{e}^{-t}\qquad(7)$$

的全部解。

解 对应的齐次方程就是例1中的方程，它的全部解是

$$\varphi(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{t}+C_3e^{-t},$$

首先求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^3K}{dt^3}-2\dfrac{d^2K}{dt^2}-\dfrac{dK}{dt}+2K=0,\\ K(0)=0,\ K'(0)=0,\ K''(0)=1,\end{cases}$$

即由初值条件可得代数方程组

$$\begin{cases}0=K(0)=C_1+C_2+C_3,\\ 0=K'(0)=2C_1+C_2-C_3,\\ 1=K''(0)=4C_1+C_2+C_3.\end{cases}$$

解这个方程组得

$$C_1=\frac{1}{3},\ C_2=-\frac{1}{2},\ C_3=\frac{1}{6}.$$

故

$$K(t)=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{6}e^{-t}.$$

代入特解公式得

$$\begin{aligned}&\int_0^t K(t-s)f(s)ds\\ &=\int_0^t\left[\frac{1}{3}e^{2(t-s)}-\frac{1}{2}e^{t-s}+\frac{1}{6}e^{-(t-s)}\right](1+e^{-s})ds\\ &=\frac{1}{3}e^{2t}\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{t}(e^{-t}-1)+\frac{1}{6}e^{-t}(e^{t}-1)\\ &\quad+\frac{1}{3}e^{2t}\left(-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}\right)\\ &\quad+\frac{1}{6}e^{-t}\cdot t.\end{aligned}$$

去掉属于齐次方程的全部解中的形式的诸项，得到非齐次方程的一个特解为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}te^{-t}$. 所以(7)的全部解是

$$x=C_1e^{2t}+C_2e^{t}+C_3e^{-t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}te^{-t}.$$

实际上，§2中已经用过的待定系数法，在n阶情形也可以用来求特解。对本例，将方程(7)分成两个非齐次方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}-2\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}+2x=1, \tag{8}$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}-2\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}+2x=e^{-t}. \tag{9}$$

对方程(8)，设特解形式为$x_1=A$，其中A为待定常数，将其代入(8)得$2A=1$，即$A=\frac{1}{2}$，故$x_1=\frac{1}{2}$。对方程(9)，因为-1是齐次方程的特征根，设特解形式为$x_2=Bte^{-t}$，其中B为待定常数。注意到

$$\frac{dx_2}{dt}=Be^{-t}-Bte^{-t},\ \frac{d^2x_2}{dt^2}=-2Be^{-t}+Bte^{-t},$$

$$\frac{d^3x_2}{dt^3}=3Be^{-t}-Bte^{-2t},$$

将这些代入方程(9)，

$$\begin{aligned}&(3Be^{-t}-Bte^{-2t})-2(-2Be^{-t}+Bte^{-t})\\&-(Be^{-t}-Bte^{-t})+2Bte^{-t}=e^{-t},\end{aligned}$$

得$B=\frac{1}{6}$，故$x_2=\frac{1}{6}te^{-t}$。由叠加原理得(7)的全部解为

$$x=C_1e^{2t}+C_2e^{t}+C_3e^{-t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}te^{-t}.$$

例6 求微分方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=2\cos^2 t \tag{10}$$

的全部解。

解 (10)所对应的齐次方程就是例4中的方程，例4中的方程全部解是

$$\varphi(t)=(C_1+C_2t)\cos t+(C_3+C_4t)\sin t,$$

其中C_1,C_2,C_3,C_4是任意常数。

对(10)求特解，若用公式(6)则比较复杂，现用待定系数法来求特

解. 因为此时(10)的右端非齐次项

$$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$$

是属拟多项式形式:

$$e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t),$$

其中 $P(t)$,$Q(t)$分别为 t 的 m_1, m_2 次多项式. 先对右端为 $f_1(t)=1$ 的方程,令特解 $x_1=A$,这里 A 为待定常数,将它代入方程得 $A=1$,故 $x_1=1$.然后再对右端函数为 $f_2(t)=\cos 2t$ 的非齐次方程,令特解$x_2=B\cos 2t + C\sin 2t$,这里 B,C 为待定常数. 注意到

$$\frac{dx_2}{dt} = -2B\sin 2t + 2C\cos^2 2t,$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -4B\cos 2t - 4C\sin 2t,$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 8B\sin 2t - 8C\cos 2t,$$

$$\frac{d^4x_2}{dt^4} = 16B\cos 2t + 16C\sin 2t,$$

将其代入方程,

$$(16B\cos 2t + 16C\sin 2t) + 2(-4B\cos 2t - 4C\sin 2t) + (B\cos 2t + C\sin 2t) = \cos 2t.$$

可以求得 $B=1/9$,$C=0$,即 $x_2=\frac{1}{9}\cos 2t$.

因此方程(10)的全部解为

$$x = (C_1 + C_2 t)\cos t + (C_3 + C_4 t)\sin t + 1 + \frac{1}{9}\cos 2t.$$

相应于非齐次方程右端自由项的各种情况，所取特解的形式归纳如下:

① 若 $f(t)=e^{\alpha t}P(t)$,其中 $P(t)$是 t 的最高次数为 m 的多项式,则方程的特解为

$$x(t) = e^{\alpha t}A(t)t^k,$$

其中 $A(t)$是 t 的最高次数为 m 的多项式，且该多项式的系数均是待

定常数，k 为特征方程(2)的根 α 的重数；当 α 不是(2)的根时，我们规定 $k=0$。

② 若 $f(t)=e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t]$ 或 $f(t)=e^{\alpha t}[Q(t)\ \sin\beta t]$ 其中 $P(t)$，$Q(t)$为 t 的最高次数为 m 的多项式，则特解有形式

$$x(t)=e^{\alpha t}[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t],$$

其中 $A(t)$，$B(t)$ 均是 t 的最高次数为 m 的多项式，且它的系数均是待定常数，k 为特征方程(2)的根 $\alpha\pm i\beta$ 的重数，当 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根时，规定 $k=0$。

§4 n阶常系数线性方程求解的运算子法和拉普拉斯变换法

一、运 算 子 法

设以记号 D 表示求导的运算，即定义

$$D=\frac{d}{dt},\ Dx=\frac{dx}{dt},$$

其中 $x=x(t)$是一个可微函数，今后称 D 为(微分)运算子(简称算子)。我们还可以逐次定义

$$D^2x=D(Dx)=\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$D^3x=D(D^2x)=\frac{d^3x}{dt^3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$D^nx=D(D^{n-1}x)=\frac{d^nx}{dt^n}.$$

一般地，如果 $P(\lambda)=\sum\limits_{j=0}^{n}a_j\lambda^j$ 是 λ 的常系数 n 次多项式，则定义

$$P(D)x=\sum_{j=0}^{n}a_jD^jx=\sum_{j=0}^{n}a_j\frac{d^jx}{dt^j},\tag{1}$$

其中 $x(t)$ 是具有 n 阶导数的函数，形式地记

$$P(D)=\sum_{j=0}^{n}a_jD^j.$$

于是 n 阶常系数线性微分方程可记为

$$P(D)x=f(t). \tag{2}$$

现在我们给出一些关于算子的运算的几个定义：

定义 1 设 $P(D)$ 和 $Q(D)$ 分别是 n 阶和 m 阶多项式运算子，定义两个运算子 $P(D)$ 和 $Q(D)$ 的和为：

$$\{P(D)+Q(D)\}x\equiv P(D)x+Q(D)x.$$

定义 2 设 $P(D)$ 和 $Q(D)$ 分别是 n 阶和 m 阶多项式运算子，定义两个运算子 $P(D)$ 和 $Q(D)$ 的积为：

$$\{P(D)\cdot Q(D)\}x\equiv P(D)\{Q(D)x\}.$$

若 $Dx=f(t)$，则 $x=\int f(t)\mathrm{d}t$，记为 $x=\frac{1}{D}f(t)$，可见 $\frac{1}{D}$ 即为积分算子。

定义 3 设 $P(D)$ 是 n 阶多项式运算子，定义运算子 $P(D)$ 的逆为 $\frac{1}{P(D)}$，它使得 $\frac{1}{P(D)}f(t)$ 是一个函数，经过运算子 $P(D)$ 作用后还原得 $f(t)$，即有

$$P(D)\left\{\frac{1}{P(D)}f(t)\right\}=f(t).$$

显见

$$x=\frac{1}{P(D)}f(t) \tag{3}$$

是(2)的一个特解。下面给出一些运算子的性质。

性质 1 若 $P(\lambda)$，$Q(\lambda)$ 和 $R(\lambda)$ 是次数不大于 n 的多项式，并且 $P(\lambda)+Q(\lambda)\equiv R(\lambda)$，那末对于具有 n 阶导数的函数 $x(t)$，成立着

$$P(D)x+Q(D)x\equiv R(D)x.$$

它的证明是显然的，但是要注意的是上述等式的适用范围是 n 阶可微函数。

例如，$(2+\lambda^2)+(\lambda-\lambda^2)\equiv\lambda+2$，所以

$$(2+D^2)x+(D-D^2)x\equiv Dx+2x,$$

它仅对具有二阶导数的函数成立。

性质 2 若 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$ 的次数分别为 n 和 m，那末对于具有 nm 阶连续导数的函数 $x(t)$ 成立着

$$\{P(D)Q(D)\}x\equiv\{Q(D)P(D)\}x.$$

证 设 $P(\lambda)\equiv\sum_{j=0}^{n}a_j\lambda^j$, $Q(\lambda)\equiv\sum_{k=0}^{m}b_k\lambda^k$，则

$$\{P(D)Q(D)\}x\equiv P(D)\{Q(D)x\}=P(D)\{\sum_{k=0}^{m}b_kD^kx\}$$

$$=P(D)\left\{\sum_{k=0}^{m}b_k\frac{d^kx}{dt^k}\right\}=\sum_{j=0}^{n}a_jD^j\left(\sum_{k=0}^{m}b_k\frac{d^kx}{dt^k}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{n}a_j\sum_{k=0}^{m}b_k\frac{d^{j+k}x}{dt^{j+k}}.$$

$$=\sum_{k=0}^{m}b_k\left(\sum_{j=0}^{n}a_j\frac{d^{j+k}x}{dt^{j+k}}\right)=\sum_{k=0}^{m}b_kD^k\left(\sum_{j=0}^{n}a_j\cdot D^jx\right)$$

$$=Q(D)\{P(D)x\}=\{Q(D)P(D)\}x.$$

性质 3 若 $P(\lambda)$ 是 n 次多项式，$x(t)$ 具有 n 阶导数，那末

(i) $P(D)e^{at}\equiv P(a)e^{at}$;

(ii) $P(D)[e^{at}x(t)]\equiv e^{at}P(D+a)x(t)$;

(iii) $P(D^2)\sin\omega t\equiv P(-\omega^2)\sin\omega t$,

$P(D^2)\cos\omega t\equiv P(-\omega^2)\cos\omega t$.

证 (i) 易证 $D(e^{at})\equiv ae^{at}$, $D^j(e^{at})\equiv a^je^{at}$（$j$ 为任意正整数），故有 $P(D)e^{at}\equiv P(a)e^{at}$。

(ii) 因为 $D(e^{at}x(t))\equiv\frac{d}{dt}(e^{at}x(t))=ae^{at}x(t)+e^{at}\frac{dx(t)}{dt}$

$=e^{at}(D+a)x(t)$，用数学归纳法可证，对任意正整数 j 成立

$$D^j(e^{at}x(t))\equiv e^{at}(D+a)^jx(t),$$

因此，若 $P(D)=\sum_{j=0}^{n}a_jD^j$，则

$$P(D)(e^{at}x(t))\equiv\sum_{j=0}^{n}a_jD^j(e^{at}x(t))\equiv\sum_{j=0}^{n}a_je^{at}(D+a)^jx(t)$$

$$\equiv e^{at}P(D+a)x(t).$$

(iii) 的证明留给读者作为练习。

当方程(2)的右端 $f(t)$ 取一些特殊形式时，(2)的特解 $\tilde{x}(t)$ 可以用算子解法如下求出：

1° $f(t)=e^{at}$，且 $P(a)\neq 0$ 时，那末

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{P(D)}e^{at}=\frac{1}{P(a)}e^{at};$$

2° $f(t)=e^{at}$，且 $P(a)=P'(a)=\cdots=P^{(k)}(a)=0$，$P^{(k)}(a)\neq 0$ 时（即 a 是 k 重特征根时），那末

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{P(D)}e^{at}=\frac{t^k e^{at}}{P^{(k)}(a)}.$$

事实上，

$$P(D)\left\{\frac{t^k e^{at}}{P^k(a)}\right\}=\frac{1}{P^{(k)}(a)}e^{at}P(D+a)t^k$$

$$=\frac{e^{at}}{P^{(k)}(a)}\left\{\left[\frac{P^{(k)}(a)}{k!}D^k+\cdots\right]t^k\right\}=e^{at}.$$

这里利用了下述关系式：

$$P(D+a)=P(a)+P'(a)D+\cdots+\frac{P^{(k)}(a)}{k!}D^k+\cdots$$

$$=\frac{P^{(k)}(a)}{k!}D^k+\cdots.$$

3° 方程 $P(D^2)x=\sin\omega t$（或 $\cos\omega t$），又 $P(-\omega^2)\neq 0$，那末

$$\tilde{x}=\frac{1}{P(-\omega^2)}\sin\omega t\left(\text{或}\frac{1}{P(-\omega^2)}\cos\omega t\right)$$

事实上，

$$P(D^2)\left\{\frac{1}{P(-\omega^2)}\sin\omega t\right\}=\frac{1}{P(-\omega^2)}P(D^2)\sin\omega t$$

$$=\frac{1}{P(-\omega^2)}P(-\omega^2)\sin\omega t=\sin\omega t.$$

又

$$P(D^2)\left\{\frac{1}{P(-\omega^2)}\cos\omega t\right\}=\frac{1}{P(-\omega^2)}P(D^2)\cos\omega t$$

$$=\frac{1}{P(-\omega^2)}P(-\omega^2)\cos\omega t=\cos\omega t.$$

4° 方程 $P(D^2)x=\sin\omega t$（或$\cos\omega t$），又 $P(-\omega^2)=0$，且 $P(\lambda)=(\lambda^2+\omega^2)^r Q(\lambda)$，$Q(-\omega^2)\neq 0$，那末

$$\tilde{x}=\frac{1}{Q(-\omega^2)}\operatorname{Im}\left[\mathrm{e}^{i\omega t}\frac{t^r}{(2i\omega)^r r!}\right]$$

$$\left(或\frac{1}{Q(-\omega^2)}\operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{i\omega t}\frac{t^r}{(2i\omega)^r r!}\right]\right).$$

5° 方程 $P(D)x=\mathrm{e}^{at}v(t)$，那末

$$\tilde{x}=\mathrm{e}^{at}\frac{1}{P(D+a)}v(t),$$

6° 方程 $P(D)x=u(t)\sin\omega t$（或 $u(t)\cos\omega t$），则

$$\tilde{x}=\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{P(D)}\mathrm{e}^{i\omega t}u(t)\right\}\left(或\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{P(D)}\mathrm{e}^{i\omega t}u(t)\right\}\right).$$

7° 方程 $P(D)x=t^k$，且 $P(0)\neq 0$，那末

$$\tilde{x}=\frac{1}{P(D)}t^k=(C_0+C_1D+\cdots+C_kD^k)t^k=Q_k(D)t^k,$$

其中

$$\frac{1}{P(\lambda)}=Q(\lambda)=C_0+C_1\lambda+\cdots+C_k\lambda^k+C_{k+1}\lambda^{k+1}+\cdots,$$

$$\frac{1}{P(D)}=Q(D)=Q_k(D)+\cdots,$$

$$Q_k(D)=C_0+C_1D+\cdots+C_kD^k.$$

8° 方程 $P(D)x=t^k$，若 $P(0)=0$，且 0 是 $P(\lambda)=0$ 的 r 重根 $P(\lambda)=Q(\lambda)\cdot\lambda^r$，$Q(0)\neq 0$，那末

$$\tilde{x}=\frac{1}{D^r}\left[\frac{1}{Q(D)}t^k\right]=\underbrace{\int\cdots\int}_{r次}\left(\frac{1}{Q(D)}t^k\right)\mathrm{d}t\cdots\mathrm{d}t$$

例 1 $$x''+x=\mathrm{e}^t.$$

解 $$\tilde{x}=\frac{1}{1^2+1}\mathrm{e}^t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t.$$

例 2
$$x''+x=\cos 2t.$$

解
$$\tilde{x}=\frac{1}{-2^2+1}\cos 2t=-\frac{1}{3}\cos 2t.$$

例 3
$$x''-2x'+x=5te^t.$$

解
$$\tilde{x}=\frac{1}{D^2-2D+1}5te^t=5e^t\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+1}t$$
$$=5e^t\frac{1}{D^2}t=5e^t\int\left(\int t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t=\frac{5}{6}e^t\cdot t^3.$$

例 4
$$x''-2x'+x=e^t.$$

解 现 $P(D)=D^2-2D+1, P(1)=0, P'(1)=0, P''(1)=2$,
$$\tilde{x}=\frac{1}{D^2-2D+1}=\frac{t^2}{P''(1)}e^t=\frac{1}{2}t^2e^t.$$

例 5
$$x''+x=\cos t,$$

解 $P(D^2)=D^2+1, Q(-1^2)=Q(-1)=1, r=1$.
代公式得
$$\tilde{x}=\frac{1}{D^2+1}\cos t=\frac{1}{Q(-1^2)}\ \mathrm{Re}\left[e^{i\cdot1\cdot t}\frac{t}{(2i\cdot1)\cdot1!}\right]$$
$$=t\,\mathrm{Re}\left(\frac{\cos t+i\sin t}{2i}\right)=\frac{1}{2}t\sin t.$$

另有一种解法。作复解 $z=\frac{1}{D^2+1}e^{it}$，则 $\tilde{x}=\mathrm{Re}\,z$，而
$$z=\frac{1}{D^2+1}\ (e^{it}\cdot1)\ =e^{it}\frac{1}{(D+i)^2+1}\cdot1=e^{it}\frac{1}{D^2+2iD}\cdot1$$
$$=e^{it}\frac{1}{D(D+2i)}\cdot1=e^{it}\frac{1}{D}\left\{\frac{\frac{1}{2i}}{1+\frac{D}{2i}}\cdot1\right\}$$
$$=e^{it}\cdot\frac{1}{2i}\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{1+\frac{D}{2i}}\cdot1\right\}$$

$$= e^{it}\frac{1}{2i}\frac{1}{D}\left\{\left(1-\frac{D}{2i}+\left(\frac{D}{2i}\right)^2-\cdots\right)\cdot 1\right\}$$

$$= e^{it}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{D}\cdot 1\right)=\frac{e^{it}\cdot t}{2i},$$

所以

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}t\sin t.$$

例 6 $$x''' + x'' + x' + x = e^{-t}.$$

解 $P(D)=D^3+D^2+D+1, P(-1)=0, P'(-1)\neq 0.$

于是

$$\tilde{x} = \frac{1}{P(D)}e^{-t} = \frac{t}{P'(-1)}e^{-t} = \frac{t}{3(-1)^2+2(-1)+1}e^{-t}$$

$$= \frac{1}{2}te^{-t}.$$

例 7 $$x''' + x'' + x' + x = \sin t.$$

解 作复解 $z = \frac{1}{D^3+D^2+D+1}e^{it}$，则 $\tilde{x} = \operatorname{Im} z$，而

$$z = \frac{1}{(D^2+1)(D+1)}e^{it} = \frac{1}{D^2+1}\left[\frac{1}{D+1}e^{it}\cdot 1\right]$$

$$= \frac{1}{D^2+1}\left[e^{it}\frac{1}{(D+i)+1}\cdot 1\right] = \frac{1}{D^2+1}\left[e^{it}\frac{\frac{1}{i+1}}{\frac{D}{i+1}+1}\cdot 1\right]$$

$$= \frac{1}{D^2+1}\left[\frac{1}{i+1}e^{it}\left(1-\frac{D}{1+i}-\cdots\right)\cdot 1\right]$$

$$= \frac{1}{D^2+1}\left(\frac{1}{i+1}e^{it}\right) = \frac{1}{1+i}e^{it}\left(\frac{1}{(D+i)^2+1}\cdot 1\right)$$

$$= \frac{1}{1+i}e^{it}\left[\frac{1}{D^2+2iD}\cdot 1\right] = \frac{1}{1+i}e^{it}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D+2i}\cdot 1\right)$$

$$= \frac{1}{1+i}e^{it}\frac{1}{D}\left(\frac{\frac{1}{2i}}{1+\frac{D}{2i}}\cdot 1\right)$$

$$=\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\frac{1}{D}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(1-\frac{D}{2\mathrm{i}}-\cdots\right)\cdot 1\right]$$

$$=\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{D}\cdot 1\right)=\frac{t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{2(-1+\mathrm{i})}$$

$$=\frac{t}{4}(-1-\mathrm{i})(\cos t+\mathrm{i}\sin t),$$

所以

$$\tilde{x}=\operatorname{Im} z=-\frac{t}{4}(\cos t+\sin t).$$

例 8 $x''+x=t\cos 2t.$

解 作复解

$$z=\frac{1}{D^2+1}(t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\left[\frac{1}{(D+2\mathrm{i})^2+1}t\right]$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\left[\frac{1}{D^2+4\mathrm{i}D-3}t\right]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{D^2+4\mathrm{i}D}{3}}t\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\left(1+\frac{D^2+4\mathrm{i}D}{3}+\cdots\right)t$$

$$=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2t}\left(t+\frac{4\mathrm{i}}{3}\right),$$

所以

$$\tilde{x}=\operatorname{Re} z=-\frac{1}{3}\left(t\cos 2t-\frac{4}{3}\sin 2t\right)$$

$$=\frac{4}{9}\sin 2t-\frac{1}{3}t\cos 2t.$$

例 9 $x''+x=t\,\mathrm{e}^t\sin t.$

解 作复解

$$z=\frac{1}{1+D^2}t\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\frac{1}{1+(D+1+\mathrm{i})^2}t$$

$$= e^{(1+i)t}\frac{1}{1+2i+2(1+i)D+D^2}t$$

$$= e^{(1+i)t}\left\{\frac{\frac{1}{1+2i}}{1+\frac{2(1+i)D+D^2}{1+2i}}\right\}t$$

$$= e^{(1+i)t}\frac{1}{1+2i}\left\{1-\frac{2(1+i)D+D^2}{1+2i}-\cdots\right\}t$$

$$= e^{(1+i)t}\frac{1}{1+2i}\left(t-\frac{2(1+i)}{1+2i}\right)$$

$$= e^{(1+i)t}\left(\frac{1-2i}{5}t+\frac{-2+14i}{25}\right),$$

所以

$$\tilde{x}=\operatorname{Im} z=\frac{1}{25}e^t[(14-10t)\cos t+(-2+5t)\sin t]。$$

例 10 $$x'''-x'=t。$$

解

$$\tilde{x}=\frac{-1}{D(1-D^2)}t=\frac{-1}{D}\{(1+D^2+\cdots)t\}$$

$$=-\frac{1}{D}t=-\int t\,dt=-\frac{t^2}{2}。$$

二、拉普拉斯(Laplace)变换法

先介绍一些拉普拉斯变换的基本概念与性质。

定义 设函数 $f(t)$ 满足下列条件：

(i) $t<0$ 时 $f(t)=0$；

(ii) $t\geqslant 0$ 时 $f(t)$ 及 $f'(t)$ 除去有限个第一类间断点外处处连续；

(iii) 存在常数 M 及 $s_0\geqslant 0$，使得 $|f(t)|\leqslant Me^{s_0t}(0<t<\infty)$，则下列两式同时成立：

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt\quad(\operatorname{Re}s>S_0),$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}F(s)e^{st}ds\quad(\alpha>S_0)$$

此时称 $F(s)$ 为 $f(t)$的拉普拉斯变换,记为

$$F(s)=L[f(t)].$$

而称 $f(t)$为 $F(s)$的拉普拉斯逆变换,记为

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]$$

还称 $f(t)$为原函数,$F(s)$为像函数。

拉普拉斯变换具有下列性质:

(i) 设 a,b 为常数,则

$$L[af(t)+bg(t)]=aL[f(t)]+bL[g(t)].$$

(ii) 设 $x_0=x(0),x_0'=x'(0),\cdots,x_0^{(n-1)}=x^{(n-1)}(0)$,

则

$$L[x'(t)]=sL[x(t)]-x_0,$$

$$L[x''(t)]=s^2L[x(t)]-sx_0-x_0',$$

……

$$L[x^{(n)}(t)]=s^nL[x(t)]-s^{n-1}x_0-s^{n-2}x_0'-\cdots-sx_0^{(n-2)}-x_0^{(n-1)}.$$

(iii) 设 a 为任意常数,则

$$F(s+a)=L[e^{-at}f(t)].$$

用拉普拉斯变换法求解方程及初值问题是很有效的。

用拉普拉斯变换法求解的步骤如下:

(i) 对方程两边施行拉普拉斯变换,使关于未知函数 x 的方程变为关于像函数 $X(s)=L[x(t)]$的代数方程;

(ii) 解关于 $X(s)$ 的代数方程,查表求原像$x(t)$(常要用部分分式化简后再查表)。

上述拉普拉斯变换的性质是易于验证的。下面仅举其中几个为例加以说明,其余留给读者作为练习。

先证性质(ii)。由定义得

$$L[x'(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}x'(t)dt,$$

分部积分后,上式右边为

$$e^{-st}x(t)\Big|_{t=0}^{t=+\infty}-\int_0^{+\infty}x(t)de^{-st}$$

$$=-x(0)+s\int_0^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$

$$= sL[x(t)] - x(0).$$

再证性质(iii)．由定义知

$$L[e^{-at}f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{-at}f(t)dt$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}f(t)dt$$
$$= F(s+a).$$

若 $f(t) = e^{at}$，则 $L[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}\,dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}$ $= \frac{1}{s-a}$，即 $F(s) = \frac{1}{s-a}$。

又若 $f(t) = \sin at$，则 $L[\sin at] = \int_0^{+\infty} e^{-st}\sin at\,dt$．分部积分后，易知上式右边为$\frac{a}{s^2+a^2}$，即 $F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$。

例 11 求解初值问题

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x = e^{-t}, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

解 记 $X(s) = L[x(t)]$，在方程两边施行拉普拉斯变换，得到

$$s^2X(s) + 2sX(s) + X(s) = \frac{1}{s+1},$$

所以 $X(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$，查表得 $x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$。实际上，通过拉氏变换只求得一个特解。一般地，原非齐次方程的全部解为

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

其中 C_1 与 C_2 为两个任意常数。将初始条件代入得

$$0 = x(0) = C_1,\quad 0 = x'(0) = C_2,$$

这样，我们用拉氏变换求得的解 $x(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-t}$ 就是原来的初值问题的解，而不仅仅是求得了非齐次方程的一个特解。

例 12 求解初值问题

$$\begin{cases}x'''+3x''+3x'+x=1,\\ x(0)=x'(0)=x''(0)=0.\end{cases}$$

解 记 $X(s)=L[x(t)]$,在方程两边施行拉普拉斯变换,得到

$$(s^3+3s^2+3s+1)X(s)=\frac{1}{s},$$

解得

$$X(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}+\frac{DE}{(s+1)^3}$$

$$=\frac{A(s+1)^3+Bs(s+1)^2+Cs(s+1)+Es}{s(s+1)^3}$$

因此有

$$1=A(s+1)^3+Bs(s+1)^2+Cs(s+1)+Es.$$

令 $s=0$,得 $A=1$;令 $s=-1$,得 $E=-1$; 项 s^3 的系 数 $0=A+B$, 所以 $B=-A=-1$;又令 $s=1$ 得

$$1=8A+4B+2C+E=2C+3,$$

解得 $C=-1$,故有

$$X(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3},$$

还原得

$$x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}-\frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

$$=1-\frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^{-t}.$$

例 13 求解 $x''+x=\sin t$.

解 令 $x(0)=0, x'(0)=0$,将方程两边施行拉氏变换,记 $X(s)=L[x(t)]$,则得

$$s^2X(s)+X(s)=\frac{1}{s^2+1},$$

解得

$$X(s)=\frac{1}{(s^2+1)^2}=\frac{A}{s^2+1}+\frac{Bs^2+C}{(s^2+1)^2}=\frac{A(s+1)^2+Bs^2+C}{(s^2+1)^2},$$

故有

$$1=A(s^2+1)+Bs^2+C.$$

令 $s=0$，得 $1=A+C$；令 $s=1$，得 $1=2A+B+C$；s^2 项系数 $A+B=0$，不妨取 $A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{2}$，故有

$$X(s)=\frac{\frac{1}{2}}{(s^2+1)}+\frac{-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s^2+1)}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(s^2-1)}{(s^2+1)^2},$$

还原得初值问题的解

$$x(t)=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t.$$

为了求原来方程的全部解，我们看到刚才求得的解是方程的特解，不包含在齐次方程通解中的解是 $-\frac{1}{2}t\cos t$，而齐次方程的通解为 $C_1\cos t+C_2\sin t$，所以全部解为

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t,$$

其中 C_1 与 C_2 为二个任意常数。

例 14 求解初值问题

$$\begin{cases}x''+x=\sin t,\\ x(0)=0,\ x'(0)=1.\end{cases}$$

解 本题的初值不同于前题。设 $X(s)=L[x(t)]$，在方程两边施行拉氏变换得

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)=\frac{1}{s^2+1},$$

解得

$$(s^2+1)X(s)=\frac{1}{s^2+1}+1,$$

即有

$$X(s)=\frac{1}{(s^2+1)^2}+\frac{1}{s^2+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}+\frac{-\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}}{(s^2+1)^2}+\frac{1}{s^2+1}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{s^2+1}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(s^2-1)}{(s^2+1)^2}.$$

还原求得初值问题的解为

$$x(t)=\frac{3}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t.$$

习　题

1．求解下列线性齐次方程：

① $y'''-8y=0$；

② $y^{(4)}+4y=0$；

③ $y^{(5)}-6y^{(4)}+9y'''=0$；

④ $y^{(5)}-10y'''+9y'=0$；

⑤ $y^{(6)}+2y''+y=0$；

⑥ $y'''-3y''+3y'-y=0$；

⑦ $y'''-y''-y'+y=0$；

⑧ $y^{(4)}-5y''+4y=0$；

⑨ $y^{(5)}+8y''+16y'=0$；

⑩ $y'''-3y'+2y=0$；

⑪ $y^{(4)}+4y''+3y=0$.

2．求解下列初值问题：

① $y'''-y'=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=1$；

② $y'''-3y'-2y=9e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-3$, $y''(0)=3$；

③ $y^{(4)}+y''=2\cos x$，$y(0)=-2$，$y'(0)=1$，$y''(0)=y'''(0)=0$.

3．建立具有给定特解的常系数(尽可能是较低阶的)线性齐次方程：

① $y_1=e^{2x}\cos x$；

② $y_1=x\,e^{x}\cos 2x$；

③ $y_1=x\,e^{x}$，$y_2=e^{-x}$；

④ $y_1=x$，$y_2=\sin x$.

4．解方程

$$y'''-6y''+9y'=xe^{3x}+e^{3x}\cos 2x.$$

5．求解下列方程：

① $(D^3+D^2+D+1)x=t\,e^{t}$；

② $(D^3+D^2+D+1)x=\cos 2t+\cos 3t$；

③ $(D^3-5D^2+8D-4)x=e^{2t}+2e^{t}+3e^{-t}$；

④ $(D-1)^3x=t-3$；

⑤ $(D^4+1)x=5\sin 2t$；

⑥ $(D^4-4D^2-5)x=t+\cos t$；

⑦ $D(D^4+2D^2+1)x=at+b\sin t+c\cos t$.

6．设 $x=\varphi_j(t)(j=1,2,\cdots,k)$是微分方程

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=f_j(t)$$

的解，试证 $x=\sum_{j=1}^{k}c_j\varphi_j(t)$是微分方程

$$a_0\frac{d^nx}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nx=\sum_{j=1}^{k}c_jf_j(t),$$

的解.

7． 给出 n 阶常系数齐次线性微分方程的解具有下述性质之一的充要条件：

① 它的每一个解当 $t\to+\infty$ 时趋向于零；

② 它的每一个解在 $0\leqslant t<+\infty$ 上是有界的；

③ 存在在 $0\leqslant t<+\infty$ 上无界的解.

8．用运算子方法求解下列方程

① $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=t^2$；

② $3\dfrac{d^2x}{dt^2}+12x=2\sin^2 t$；

③ $5\frac{d^2x}{dt^2}+5x=\sin t-\cos 2t$；

④ $\frac{d^4x}{dt^4}-4\frac{d^3x}{dt^3}+6\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+x=(t+1)e^t$；

⑤ $\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^2x}{dt^2}+x=t$.

§5　线性常系数方程组

本节考虑形如

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}\tag{2}$$

的线性常系数微分方程组.(1)称为非齐次的方程组，(2)称为齐次方程组.其中 A 为 $n\times n$ 阶常数矩阵，$\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{f}(t)$ 均为 $n\times 1$ 函数向量.一般地有

$$A=(a_{ij})\qquad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\\vdots\\f_n(t)\end{pmatrix}.$$

对于方程组(1)还可以展开写成

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+f_1(t),\\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+f_2(t),\\ \cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+f_n(t).\end{cases}$$

以二阶常系数线性方程为例，可以将方程

$$x'' + a_1x' + a_0x = f(t)$$

化为等价的方程组，只需令 $x_1 = x, x_2 = x'$ 即有

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -a_0x_1 - a_1x_2 + f(t). \end{cases}$$

于是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

一般地，对于 n 阶常系数线性方程

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x = f(t),$$

令 $x_1 = x, x_2 = x', \cdots, x_{n-1} = x^{(n-2)}, x_n = x^{(n-1)}$，有

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + f(t). \end{cases} \tag{3}$$

这里就有

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

一、关于向量和矩阵的准备知识

1° 矩阵的范数

设 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$是两个 $n\times m$ 阶矩阵,$(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$。定义 A,B 的内积 $\langle A,B\rangle$为

$$\langle A,\ B\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\bar{b}_{jk}, \tag{4}$$

矩阵 A 的范数$\|A\|$为

$$\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|a_{jk}|^2}. \tag{5}$$

有时也定义$\|A\|$为

$$\|A\|=\max_{j,k}|a_{jk}|,$$

或者

$$\|A\|=\max_{j}\sum_{k=1}^{m}|a_{jk}|,$$

或者

$$\|A\|=\max_{k}\sum_{j=1}^{n}|a_{jk}|.$$

特别地,当 $m=1$ 时,若 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$, 则$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$, $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2}$.

关于范数和内积有以下性质:

(i) $\|A\|\geqslant 0$;且$\|A\|=0\Longleftrightarrow A=O$;(其中 O 表示零矩阵,即其所有元素为零);

(ii) 若 α 是一个数,则$\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$,

$$\langle\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\alpha\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle,\langle\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}\rangle=\alpha\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle;$$

(iii) $|\langle A,B\rangle|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$;

(iv) $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$;

(v) $\|A^{\mathrm{T}}\|=\|A^*\|=\|A\|$(这里 A^{T} 是 A 的转置矩阵, A^* 是 A 的共轭转置矩阵,即 $A^*=\bar{A}^{\mathrm{T}}$);

(vi) 若 A是 $n\times m$ 矩阵,B 是 $m\times l$ 矩阵,则

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

设有矩阵序列$\{A_k, k=1, 2\cdots\}$其中每个A_k均是$n\times m$阶常值矩阵，它的极限A是指这样的$n\times m$常值矩阵A，使得

$$\lim_{k\to+\infty} \|A_k - A\| = 0.$$

此时我们简记$\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$.

类似地，矩阵的收敛级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$，是指级数的部分和矩阵序列$\{S_n, n=1,2,\cdots\}$是收敛的，其中$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

2° 函数矩阵

区间$\alpha<t<\beta$内的$n\times m$阶函数矩阵$A(t)$是指$n\times m$阶矩阵$A(t)$，其中每个元素$a_{ij}(t)$均是$\alpha<t<\beta$内有定义的函数。当$m=1$或$n=1$时，我们称此时的矩阵值函数为函数向量。

与前类似可定义函数矩阵序列，函数矩阵级数以及它们的收敛性。

若函数矩阵$A(t)$的每个元素$a_{ij}(t)$都是区间$\alpha<t<\beta$内的连续函数，则称$A(t)$在区间$\alpha<t<\beta$内是连续的；又若每个$a_{ij}(t)$都是区间$\alpha<t<\beta$内的可微函数，则称$A(t)$在区间$\alpha<t<\beta$内是可微的，并定义

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}a_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

再若$t_0\in(\alpha,\beta)$，$t\in(\alpha,\beta)$，各个$a_{ij}(t)$在区间(α,β)内都是可积的，则称$A(t)$在区间(α,β)内是可积的，并且定义

$$\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s = \left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(s)\mathrm{d}s\right).$$

例如，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} t^2 \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} e^t & t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}.$$

$$\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix} s^2 \\ \sin s \end{pmatrix}\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} s^2\mathrm{d}s \\ \int_{t_0}^{t}\sin s\,\mathrm{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3} \\ -\cos t + \cos t_0 \end{pmatrix}.$$

$$\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix} e^s & s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} e^s\mathrm{d}s & \int_{t_0}^{t} s\,\mathrm{d}s \\ \int_{t_0}^{t}\sin s\,\mathrm{d}s & \int_{t_0}^{t}\cos s\mathrm{d}s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t - e^{t_0} & \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} \\ -\cos t + \cos t_0 & \sin t - \sin t_0 \end{pmatrix}.$$

今后假定所遇到的函数矩阵都是可微的或可积的。

现把一些常用的结果、运算法则与性质列举如下：

1) $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \equiv 0$ 的充要条件是 $A(t) \equiv A$ 为常值矩阵；

2) 若 $A(t)$ 和 $B(t)$ 都是 $n \times m$ 阶矩阵，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t) \pm B(t)] \equiv \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t};$$

3) 若 $A(t)$ 是 $n \times m$ 阶矩阵，$B(t)$ 是 $m \times l$ 阶矩阵，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)B(t)] \equiv \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}B(t) + A(t)\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t};$$

4) 若 $A(t)$ 是 $n \times m$ 阶矩阵，$x(t)$ 是 m 维函数向量，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)x(t)] = \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}x(t) + A(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},$$

特别地，设 $C(t)$ 为数量函数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A(t)C(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[C(t)A(t)]$$

$$= C(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}A(t);$$

5）若 $A^{\mathrm{T}}(t)$ 和 $A^{*}(t)$ 分别表示 $A(t)$ 的转置矩阵和共轭转置矩阵，则

$$\frac{\mathrm{d}A^{\mathrm{T}}(t)}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\mathrm{d}A^{*}(t)}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\right]^{*};$$

6）若在(α,β)内 n 阶方阵 $A(t)$有逆矩阵 $A^{-1}(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}A^{-1}(t);$$

7）$$\int_{t_0}^{t}(aA(s)+bB(s))\mathrm{d}s\equiv a\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s+b\int_{t_0}^{t}B(s)\mathrm{d}s,$$

其中 a,b 为常数；

8）若 A 是 $n\times m$ 阶常值矩阵，$B(t)$是 $m\times l$ 阶函数矩阵，则

$$\int_{t_0}^{t}AB(s)\,\mathrm{d}s\equiv A\int_{t_0}^{t}B(s)\mathrm{d}s,$$

若 $A(t)$是 $n\times m$ 阶函数矩阵，B 是 $m\times l$ 阶常值矩阵，则

$$\int_{t_0}^{t}A(s)B\,\mathrm{d}s\equiv\left(\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s\right)B,$$

9）$$\int_{t_0}^{t}A^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\equiv\left(\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}};$$

10）$$\int_{t_0}^{t}A^{*}(s)\mathrm{d}s\equiv\left(\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s\right)^{*};$$

11）若 $A(t)$在(α,β)内连续，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_{t_0}^{t}A(s)\mathrm{d}s\right]\equiv A(t);$$

12）若 $A(t)$在(α,β)内是可微的，且$\dfrac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}$连续，则

$$\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A(s)\right]\mathrm{d}s\equiv A(t)-A(t_0);$$

13）定义 $$\|A(t)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}(t)|^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\max_{t\in[\alpha,\beta]}|a_{ij}(t)|^2},$$

其中 $A(t)$ 为 $n\times m$ 阶函数矩阵；

14) 若 $C(t)$ 是数量函数，则 $\|A(t)C(t)\|=\|C(t)A(t)\|\leqslant|C(t)|\cdot\|A(t)\|$；

15) $\left\|\int_\alpha^\beta A(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_\alpha^\beta\|A(t)\|\mathrm{d}t(\beta>\alpha)$；

16) 设 $B(t)$ 是 $n\times n$ 阶函数矩阵，且 $\|B(t)\|<+\infty$ 又 $n\times n$ 阶函数方阵项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)$ 是收敛的，则

$$B(t)\left[\sum_{k=1}^{\infty}A_k(t)\right]=\sum_{k=0}^{n}[B(t)A_k(t)].$$

3° 矩阵指数函数 e^{At}：

设 A 是 $n\times n$ 阶常值方阵，定义

$$\mathrm{e}^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots. \tag{6}$$

为要说明 e^{Ak} 的定义是合理的，必须证明 (6) 中右边的函数矩阵项级数是收敛的，其中 I 为 n 阶单位方阵。现来估计部分和矩阵序列的范数：

$$\|S_m(t)\|=\left\|\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}A^it^i\right\|\leqslant\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}[\|A\|\cdot|t|]^i\leqslant\mathrm{e}^{\|At\|},$$

所以 $\|S_m(t)\|$ 是收敛的，从而(4)的右端是收敛的级数。我们称 e^{At} 为矩阵指数函数。它是通常的指数函数 e^{at} 的自然推广。与指数函数 e^{at} 类似，我们有如下几个关于 e^{At} 的性质：

1) $\mathrm{e}^{A0}=I$；

2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}=A\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{At}A$；

3) e^{At} 的逆矩阵 $(\mathrm{e}^{At})^{-1}$ 存在，且有

$$(\mathrm{e}^{At})^{-1}=\mathrm{e}^{-At};$$

4) 设 $J=S^{-1}AS$，则 $S^{-1}\mathrm{e}^{At}S=\mathrm{e}^{Jt}$；

5) $\mathrm{e}^{A(t+s)}=\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{As}=\mathrm{e}^{As}\mathrm{e}^{At}$；

6) 若 $AB=BA$，则 $\mathrm{e}^{(A+B)t}=\mathrm{e}^{At}\cdot\mathrm{e}^{Bt}=\mathrm{e}^{Bt}\cdot\mathrm{e}^{At}$.

下面我们只证明 5) 与 6)，其它的证明留给读者作为练习。

5）注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{A(t+s)}=\frac{\mathrm{d}e^{A(t+s)}}{\mathrm{d}(t+s)}\frac{\mathrm{d}(t+s)}{\mathrm{d}t}=Ae^{A(t+s)},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-At}\cdot e^{A(t+s)}]=\frac{\mathrm{d}e^{-At}}{\mathrm{d}t}\cdot e^{A(t+s)}+e^{-At}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{A(t+s)}$$

$$=-e^{-At}Ae^{A(t+s)}+e^{-At}Ae^{A(t+s)}=0,$$

所以 $e^{-At}\cdot e^{A(t+s)}=e^{-A\cdot 0}\cdot e^{A(0+s)}=e^{As}$，即有

$$e^{At}\cdot e^{-At}e^{A(t+s)}=e^{At}\cdot e^{As},$$

所以 $$e^{A(t+s)}=e^{At}\cdot e^{As}.$$

类似地可证得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{A(t+s)}e^{-At}]=0.$$

从而有 $$e^{A(t+s)}e^{-At}=e^{A(0+s)}\cdot e^{-A\cdot 0}=e^{As},$$

$$e^{A(t+s)}e^{-At}e^{At}=e^{As}e^{At}.$$

即有 $$e^{A(t+s)}=e^{As}e^{At}.$$

6） $$e^{(A+B)t}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}(A+B)^k t^k\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(At+Bt)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!(At)^l}{k!l!}\cdot\frac{(Bt)^{k-l}}{(k-l)!}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(At)^i}{i!}\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(Bt)^j}{j!}\right]=e^{At}\cdot e^{Bt}.$$

这里用到了绝对收敛级数的乘法定理。

下面就一些特殊类型的 A，计算 e^{At}：

1）若 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，则 $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}$.

事实上，因为 $A=\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，所以

$$A^2=\lambda_1^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_2^2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

一般地有

$$A^k=\lambda_1^k\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_2^k\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

故
$$e^{At}=I+At+A^2\frac{t^2}{2!}+\cdots+A^k\frac{t^k}{k!}+\cdots$$

$$=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]+\left[\lambda_1t\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_2t\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$$

$$+\cdots+\left[\lambda_1^kt^k\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_2^kt^k\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]+\cdots$$

$$=\left(1+\lambda_1t+\frac{\lambda_1^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{\lambda_1^kt^k}{k!}+\cdots\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$+\left(1+\lambda_2t+\frac{\lambda_2^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{\lambda_2^kt^k}{k!}+\cdots\right)\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=e^{\lambda_1t}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+e^{\lambda_2t}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t}&0\\0&e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}.$$

2）若 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}$，则 $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&t\,e^{\lambda t}\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}$.

事实上，由于 $A=\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，所以

$$A^2=\lambda^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+2\lambda\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda\\0&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=\lambda^3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+3\lambda^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2\\0&\lambda^3\end{pmatrix}.$$

一般地有

$$A^k=\lambda^k\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+k\lambda^{k-1}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&\lambda^k\end{pmatrix},$$

即

$$\frac{1}{k!}A^kt^k=\begin{pmatrix}\frac{(\lambda t)^k}{k!}&\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}t\\0&\frac{(\lambda t)^k}{k!}\end{pmatrix},$$

所以

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}t\\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t}\end{pmatrix}.$$

3）若 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，则 $e^{At}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$.

这只要注意到

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I, A^3=-A, A^4=I,$$

一般地有

$$A^{4l+1}=A,\ A^{4l+2}=-I,\ A^{4l+3}=-A,$$
$$A^{4l}=I.$$

4）若 $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$，则 $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t\\ -e^{\alpha t}\sin\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t\end{pmatrix}$.

这只要注意到 $A=\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，且 $\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 满足乘法的交换律，因此可以证得结果。

5）若 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_s\end{pmatrix}$，则 $e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_s t}\end{pmatrix}$.

6）若 A 是 $s\times s$ 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & 0\\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1\\ 0 & & & & \lambda\end{pmatrix},$$

则

$$e^{At}=e^{\lambda t}\left[I+tP+\frac{t^2P^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}P^{s-1}\right],$$

其中 $s\times s$ 阶矩阵P为如下形式：

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

具体地有

$$e^{At}=\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{1}{(s-2)!}t^{s-2} & \frac{1}{(s-1)!}t^{s-1} \\ & 1 & t & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}e^{\lambda t}.$$

二、齐次线性常系数方程组的解法

(一)方程组的通解公式——e^{At} 解法。

定理 1 方程组(2)的通解公式是

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{C}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是任意常数向量。

证 显见 $e^{At}\boldsymbol{C}$ 满足方程组(2)。设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是 (2) 的任意一个解，则

$$e^{-At}\left[\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}-A\boldsymbol{x}(t)\right]\equiv 0,$$

即

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)]\equiv 0,$$

所以，存在常数向量 $\boldsymbol{C}$ 使

$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{C},$$

即

$$\boldsymbol{x}(t)\equiv e^{At}\boldsymbol{C}.$$

定理 2 方程组(2)和

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{8}$$

构成的初值问题的解是

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0. \tag{9}$$

证 设 $\boldsymbol{x}(t)$是初值问题(2)与(8)的任意一个解，则由定理 1 得证存在常数向量 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{C}$，故

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(t_0)=\mathrm{e}^{At_0}\boldsymbol{C},$$

即有 $\boldsymbol{C}=\mathrm{e}^{-At_0}\boldsymbol{x}_0$，故得

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{-At_0}\boldsymbol{x}_0=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0.$$

对于易求得 e^{At} 的常系数矩阵为 A 的方程组，可用 e^{At} 方法直接求得通解或初值问题的解。一般地说，这种方法在理论上有较大的意义，它可提供求解的公式以及通解的结构。

例 1 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1+2x_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_2.\end{cases}$$

解 实际上，由第二个方程可直接求解得 $x_2=C_2\mathrm{e}^t$，其中 C_2 为任意常数。将之代入第一个方程得

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1+2C_2\mathrm{e}^t,$$

解这个方程得

$$x_1=C_1\mathrm{e}^t+2C_2t\mathrm{e}^t,$$

这里 C_1 为任意常数。故有

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t & 2t\mathrm{e}^t\\ 0 & \mathrm{e}^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}.$$

下面用构造 e^{At} 的方法求解。此时

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

所以

$$e^{At}=e^{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot(2t)}=\begin{pmatrix}e^{\frac{1}{2}(2t)} & (2t)\cdot e^{\frac{1}{2}(2t)}\\ 0 & e^{\frac{1}{2}(2t)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^t & 2te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t & 2te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}.$$

例 2 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+3x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-3x_1+2x_2.\end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix},e^{At}=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 3t & \sin 3t\\ -\sin 3t & \cos 3t\end{pmatrix},$$

通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 3t & \sin 3t\\ -\sin 3t & \cos 3t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)\\ e^{2t}(-C_1\sin 3t+C_2\cos 3t)\end{pmatrix}.$$

为了下面推导齐次线性常系数方程组的解的结构，我们把前面的第(4)条推广到一般的情形。设 $2m\times 2m$ 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}J_0 & I & & & 0\\ & J_0 & I & & \\ & & J_0 & \ddots & \\ & & & \ddots & I\\ 0 & & & & J_0\end{pmatrix},$$

其中

$$J_0=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$
e^{At}=\begin{pmatrix} e^{J_0t} & te^{J_0t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{J_0t} \\ & e^{J_0t} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{J_0t} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & te^{J_0t} \\ & & & e^{J_0t} \end{pmatrix},
$$

其中

$$
e^{J_0t}=e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.
$$

(二)解的结构——待定系数法。

下面通过若当(Jordan)标准形以及 e^{At} 解法证明 n 个一阶线性常系数齐次方程组的解具有类似于 n 阶线性常系数齐次方程解的结构，从而为待定系数法奠定了基础。

我们定义　方程组(2)相应的*特征方程*为

$$
\det[\lambda E-A]=0.
$$

定理 3　若方程组(2)的特征方程有特征根，分别为 s 个不相同的实根 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ 和 $2l$ 个不相同的共轭复根 $\alpha_1\pm i\beta_1,\alpha_2\pm i\beta_2,\cdots,\alpha_l\pm i\beta_l$，它们的重数相应地为 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 和 $m_1,m_2,\cdots,m_l$，且有

$$
n=n_1+n_2+\cdots+n_s+2(m_1+m_2+\cdots+m_l),
$$

则(2)的全部解具有如下的形式：

$$
\boldsymbol{x}(t)=\sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{R}_j(t)e^{\mu_j t}+\sum_{k=1}^{l}[\boldsymbol{P}_k(t)\cos\beta_k t+\boldsymbol{Q}_k(t)\sin\beta_k t]e^{\alpha_k t}, \tag{10}
$$

其中向量 $\boldsymbol{R}_j(t)(j=1,2,\cdots,s)$ 的每个分量是 t 的次数不超过 n_j-1 的多项式，向量 $\boldsymbol{P}_k(t),\boldsymbol{Q}_k(t)(k=1,2,\cdots,l)$ 的每个分量是 t 的次数不超过 m_k-1 的多项式，所有这些多项式中的系数之间有一定的关系，共包含有 n 个“独立”的任意常数。

证明　(i) 对矩阵 A，存在非异矩阵 S，使 $S^{-1}AS=J$，其中 J 为若当标准型。由定理中对特征值的假设得知

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & & & & \\ & J_2 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & J_s & & & \\ & 0 & & & J_{s+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{s+l} \end{bmatrix},$$

其中

$$J_i=\begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & 0 \\ & \mu_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu_i \end{pmatrix}_{n_i\times n_i},(i=1,2,\cdots,s),$$

$$J_{s+j}=\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j & 1 & 0 & & & \\ -\beta_j & \alpha_j & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \alpha_j & \beta_j & & & \\ 0 & 0 & -\beta_j & \alpha_j & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \alpha_j & \beta_j \\ & & & & & -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}_{m_j\times m_j}$$

$$=\begin{pmatrix} J_{0j} & 1 & & 0 \\ & J_{0j} & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ 0 & & & J_{0j} \end{pmatrix},\ (j=1,2,\cdots,l)$$

这里

$$J_{0j}=\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由前所述得知

$$e^{Jt}=\begin{pmatrix} e^{J_1t} & & & 0 \\ & e^{J_2t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{J_{s+l}t} \end{pmatrix},$$

而

$$e^{J_it}=e^{\mu_it}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & t \end{pmatrix}\quad (i=1,2,\cdots,s),$$

$$
e^{J_{k+j}t} = \begin{pmatrix} e^{J_{0j}t} & t\,e^{J_{0j}t} & \frac{t^2}{2}e^{J_{0j}t}, & \cdots & \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}e^{J_{0j}t} \\ & e^{J_{0j}t} & t\,e^{J_{0j}t} & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & t\,e^{J_{0j}t} \\ & & & & e^{J_{0j}t} \end{pmatrix},
$$

$$
(j=1,2,\cdots,l),
$$

其中

$$
e^{J_{0j}t} = e^{\alpha_j t}\begin{pmatrix} \cos\beta_j t & \sin\beta_j t \\ -\sin\beta_j t & \cos\beta_j t \end{pmatrix}.
$$

(ii) 由前知 $e^{At}=e^{(SJS^{-1})t}=Se^{Jt}S^{-1}$，把 e^{Jt} 的上列表示式代入，可得证

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= e^{At}\boldsymbol{C} \\
&= \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{R}_j(t)e^{\mu_j t} + \sum_{k=1}^{l} [\boldsymbol{P}_k(t)\cos\beta_k t + \boldsymbol{Q}_k(t)\sin\beta_k t]e^{\alpha_k t},
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{P}_k(t)$，$\boldsymbol{Q}_k(t)$，$(k=1,2,\cdots,l)$，$\boldsymbol{R}_j(t)(j=1,2,\cdots,S)$ 满足定理的结论中叙述的条件，且显见共有 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，即它们为 $\boldsymbol{C}$ 的 n 个分量.

下面的待定系数法就是以定理 3 为理论基础的。假定 $\boldsymbol{x}(t)$ 以通解形式(8)的更一般样子出现，即其中含有 n^2 个任意常数，将之代入方程组(2)求得 n^2 个任意常数满足的关系式，将 n^2 个任意常数均用 n 个任意常数表示，也就求得了(2)的通解。

例 3 求解方程组

$$
\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2. \end{cases}
$$

解 特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)=0,$$

特征根为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$。

对于 $\lambda_1=3$，令 $(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(C_1\mathrm{e}^{3t},\ C_2\mathrm{e}^{3t})^{\mathrm{T}}$，将之代入原方程组得 $2C_1-2C_2=0$，即 $C_1=C_2$，故

$$x_1=C_1\mathrm{e}^{3t},x_2=C_1\mathrm{e}^{3t}.$$

对 $\lambda_2=-1$，令 $(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(D_1\mathrm{e}^{-t},\ D_2\mathrm{e}^{-t})$，将之代入原方程组得 $-2D_1-2D_2=0$，即 $D_2=-D_1$。故有

$$x_1=D_1\mathrm{e}^{-t},x_2=-D_1\mathrm{e}^{-t}.$$

综合起来得方程组的通解为

$$\begin{cases}x_1=C_1\mathrm{e}^{3t}+D_1\mathrm{e}^{-t},\\ x_2=C_1\mathrm{e}^{3t}-D_1\mathrm{e}^{-t},\end{cases}$$

这里 C_1 与 D_1 是任意常数。

例 4 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=2x_1+x_2+3x_3,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=2x_2-x_3,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=2x_3,\\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=2,\ x_3(0)=1.\end{cases}$$

解 特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & -3\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3,$$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 是三重根。由解的结构，可以设

$$\begin{cases}x_1=(A_1+A_2t+A_3t^2)\mathrm{e}^{2t},\\ x_2=(B_1+B_2t+B_3t^2)\mathrm{e}^{2t},\\ x_3=(C_1+C_2t+C_3t^2)\mathrm{e}^{2t}.\end{cases}$$

将它们代入原方程组得

$$2(A_1+A_2t+A_3t^2)+A_2+2A_3t$$

$$= 2(A_1 + A_2 t + A_3 t^2) + (B_1 + B_2 t + B_3 t^2) + 3(C_1 + C_2 t + C_3 t^2),$$
$$2(B_1 + B_2 t + B_3 t^2) + B_2 + 2B_3 t$$
$$= 2(B_1 + B_2 t + B_3 t^2) - (C_1 + C_2 t + C_3 t^2),$$
$$2(C_1 + C_2 t + C_3 t^2) + C_2 + 2C_3 t$$
$$= 2(C_1 + C_2 t + C_3 t^2),$$

解之得　$C_2 = 0$，$C_3 = 0$，$B_3 = 0$，$B_2 = -C_1$，

$$A_2 = B_1 + 3C_1,\ A_3 = -C_1/2,$$

即 9 个任意常数 A_i，B_i，$C_i(i = 1,\ 2,\ 3)$现可用 3 个任意常数A_1，B_1，C_1 表出。这样原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = \left[\ A_1 + (B_1 + 3C_1)t - \dfrac{C_1}{2}t^2\ \right]e^{2t}, \\ x_2 = (B_1 - C_1 t)e^{2t}, \\ x_3 = C_1 e^{2t}. \end{cases}$$

将初始条件代入求得

$$A_1 = 1,\ B_1 = 2,\ C_1 = 1.$$

所以，本题初值问题的解为

$$\begin{cases} x_1 = \left(\ 1 + 5t - \dfrac{1}{2}t^2\ \right)e^{2t}, \\ x_2 = (2 - t)e^{2t}, \\ x_3 = e^{2t}. \end{cases}$$

注 1　上面用 e^{At} 解法或待定系数法求解，不但说明了线性常系数齐次方程组初值问题的解是存在的，而且能具体求得的，同时还说明初值问题的解是唯一的。

设 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$与$\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$是满足同样初值条件 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t_0) = \boldsymbol{x}^{(2)}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$的齐次方程组(2)之解，则作 $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}^{(1)}(t) - \boldsymbol{x}^{(2)}(t)$，得知它满足(2)与$\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{0}$，由定理 1 知，存在 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{y}(t) = e^{At}\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{y}(t_0) = e^{At_0}\boldsymbol{C}$，故 $\boldsymbol{C} = e^{-At_0}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$。从而得证 $\boldsymbol{y}(t) \equiv \boldsymbol{0}$，即证得初值问题的解是唯一的。

注 2　矩阵 e^{At} 的第 i 列 $\boldsymbol{X}^{(i)}(t)$实际上就是满足初始条件

$$x^{(i)}(0)=e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\longleftarrow \text{第}\, i\, \text{行},$$

以及方程组(2)的解向量 $x^{(i)}(t)$。这只要注意到

$$x^{(i)}(t)=e^{At}e_i=X^{(i)}(t)。$$

反过来，由(2)的分别满足初值条件 $x^{(i)}(0)=e_i$ 的解 $x^{(i)}(t)$ 构成矩阵$[x^{(1)}(t),x^{(2)}(t),\cdots,x^{(n)}(t)]=e^{At}$。

三、非齐次线性常系数方程组的解法

(一)常数变易公式——e^{At} 解法。

用常数变易法可以对非齐次方程组(1)建立常数变易公式。令(1)的解为 $x(t)=e^{At}C(t)$，将之代入(1)得

$$\frac{d[e^{At}C(t)]}{dt}=Ae^{At}C(t)+e^{At}\frac{dC(t)}{dt}=Ae^{At}C(t)+f(t),$$

所以

$$e^{At}\frac{dC(t)}{dt}=f(t),\ \frac{dC(t)}{dt}=e^{-At}f(t),$$

于是

$$C(t)=C+\int_{t_0}^{t}e^{-As}f(s)ds,$$

从而

$$x(t)=e^{At}\left[C+\int_{t_0}^{t}e^{-As}f(s)ds\right]$$

$$=e^{At}C+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

其中 C 是常值向量。若还要满足初值条件 $x(t_0)=x_0$，则由 $x_0=e^{At_0}C$ 得 $C=e^{-At_0}x_0$，所以解为

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}f(s)ds。\tag{11}$$

公式(9)既提供了方程组(1)的具体求解公式（如果e^{At}能具体求得），也提供了在理论上研究(1)的解的各种性质时的有用形式。因为(11)中主要用到e^{At}，所以也称用公式(11)求(1)的解的方法为e^{At}的解法。

例 5 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+3x_2+2e^{2t},\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-3x_1+2x_2.\end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}2e^{2t}\\ 0\end{pmatrix},$$

$$e^{At}=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos 3t & \sin 3t\\ -\sin 3t & \cos 3t\end{pmatrix},$$

用常数变易公式求特解

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}=\int_0^t\begin{pmatrix}\cos 3(t-s) & \sin 3(t-s)\\ -\sin 3(t-s) & \cos 3(t-s)\end{pmatrix}e^{2(t-s)}\begin{pmatrix}2e^{2s}\\ 0\end{pmatrix}ds$$

$$=e^{2t}\begin{pmatrix}\displaystyle\int_0^t 2\cos 3(t-s)ds\\ \displaystyle\int_0^t -2\sin 3(t-s)ds\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3}\sin 3t\\ \dfrac{2}{3}(\cos 3t-1)\end{pmatrix}.$$

所以原方程组的通解是

$$x_1=\left[C_1\cos 3t+\left(C_2+\frac{2}{3}\right)\sin 3t\right]e^{2t}=(C_1'\cos 3t+C_2'\sin 3t)e^{2t},$$

$$x_2=\left[\left(\frac{2}{3}+C_2\right)\cos 3t-C_1\sin 3t-\frac{2}{3}\right]e^{2t}$$

$$=(-C_1'\sin 3t+C_2'\cos 3t)e^{2t}-\frac{2}{3}e^{2t}.$$

例 6 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+2x_2+2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=2x_1+x_2+2e^{-t},\\ x_1(0)=2,\ x_2(0)=0.\end{cases}$$

解 $$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}2\\2e^{-t}\end{pmatrix}.$$

由例 3 知，本例相应的齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}&e^{-t}\\e^{3t}&-e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\D_1\end{pmatrix}.$$

现在由上面齐次方程组的通解求 e^{At}。将初始条件 $(x_1(0),x_2(0))^T=(2,0)^T$代入上述解公式，得

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\D_1\end{pmatrix}$$

解这个代数方程组得 $C_1=-\dfrac{1}{2},\ D_1=\dfrac{1}{2}$。所以 e^{At} 第一列为

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t})\\ \dfrac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t})\end{pmatrix}.$$

再将初始条件 $(x_1(0),x_2(0))^T=(0,1)^T$代入通解公式得

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1'\\D_1'\end{pmatrix},$$

解这个代数方程组得 $C_1'=\dfrac{1}{2},\ D_1'=-\dfrac{1}{2}$。所以 e^{At} 第二列为

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t})\\ \dfrac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t})\end{pmatrix}.$$

所以

$$
e^{At}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) \end{pmatrix}.
$$

代入常数变易公式(11)得原初值问题的解

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^{3t}-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{3t}+e^{-t}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
+\int_0^t\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{3(t-s)}+e^{-(t-s)}), & \frac{1}{2}(e^{3(t-s)}-e^{-(t-s)}) \\ \frac{1}{2}(e^{3(t-s)}-e^{-(t-s)}), & \frac{1}{2}(e^{3(t-s)}+e^{-(t-s)}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2e^{-s} \end{pmatrix}ds
$$

$$
=\begin{pmatrix} e^{3t}+e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} \end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix} e^{3(t-s)}+e^{-(t-s)}+e^{3t-4s}-e^{-t} \\ e^{3(t-s)}-e^{-(t-s)}+e^{3t-4s}+e^{-t} \end{pmatrix}ds
$$

$$
=\begin{pmatrix} \frac{19}{12}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}-te^{-t}+\frac{2}{3} \\ \frac{19}{12}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}+te^{-t}-\frac{4}{3} \end{pmatrix}.
$$

(二)待定系数法

对特殊的非齐次方程组（1）的右端向量，例如具有拟多项式的 $\boldsymbol{f}(t)$，也可用类似于 n 阶非齐次线性常系数方程的待定系数法求解。

再以前面的例 5 与例 6 来说明这种解法。

在例 5 中，特征方程的根是 $2\pm3i$，右端非齐次项 $\boldsymbol{f}(t)$的指数函数中的指数与特征根不等。故令特解为

$$
\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1e^{2t} \\ D_2e^{2t} \end{pmatrix},
$$

其中 D_1,D_2 是待定常数，将之代入非齐次方程组得

$$
\begin{cases} 2D_1=2D_1+3D_2+2, \\ 2D_2=-3D_1+2D_2, \end{cases}
$$

解得 $D_1=0$, $D_2=-\frac{2}{3}$，因此有特解

$$\tilde{x}_1=0,\ \tilde{x}_2=-\frac{2}{3}e^{2t}.$$

所以原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(C_1'\cos 3t+C_2'\sin 3t)e^{2t} \\ (-C_1'\sin 3t+C_2'\cos 3t)e^{2t}-\frac{2}{3}e^{2t}\end{pmatrix},$$

其中 C_1' 与 C_2' 为两个任意常数。与例 5 已得结果是一样的。

在例 6 中，特征方程的根是 -1 与 3（均是单重根），将非齐次右端项分为两部分：$\boldsymbol{f}(t)=\boldsymbol{f}_1(t)+\boldsymbol{f}_2(t)$，而

$$\boldsymbol{f}_1(t)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}_2(t)=\begin{pmatrix}0\\2e^{-t}\end{pmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{f}_1(t)$，设特解形式为 $(\tilde{x}_1^{(1)},\tilde{x}_2^{(1)})^{\mathrm{T}}=(B_1,B_2)^{\mathrm{T}}$，这里 B_1,B_2 是待定常数，将它代入原方程组得

$$\begin{cases}B_1+2B_2+2=0\\2B_1+B_2=0,\end{cases}$$

解得 $B_1=2/3,B_2=-4/3$，故有特解

$$\tilde{x}_1^{(1)}=\frac{2}{3},\ \tilde{x}_2^{(1)}=-\frac{4}{3}.$$

对 $\boldsymbol{f}_2(t)$，设特解形式为

$$(\tilde{x}_1^{(2)},\tilde{x}_2^{(2)})^{\mathrm{T}}=((A_1+D_1t)e^{-t},(A_2+D_2t)e^{-t})^{\mathrm{T}},$$

其中 A_1,D_1,A_2,D_2 是待定常数。将之代入原方程组得

$$\begin{cases}D_1-(A_1+D_1t)=A_1+D_1t+2(A_2+D_2t),\\D_2-(A_2+D_2t)=2(A_1+D_1t)+(A_2+D_2t)+2,\end{cases}$$

比较 t 的同次幂的系数得

$$D_1-A_1=A_1+2A_2,\qquad -D_1=D_1+2D_2,$$
$$D_2-A_2=2A_1+A_2+2,\ -D_2=2D_1+D_2,$$

解之得出

$$D_1=-1,\ D_2=1,\ A_1=0,\ A_2=-\frac{1}{2}.$$

因此有特解

$$\tilde{x}_1^{(2)}=-t\mathrm{e}^{-t},\ \tilde{x}_2^{(2)}=\left(-\frac{1}{2}+t\right)\mathrm{e}^{-t},$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{3t}+C_2\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{2}{3}, \\ C_1\mathrm{e}^{3t}-C_2\mathrm{e}^{-t}+t\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\dfrac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

用初始条件得

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1+C_2+\dfrac{2}{3} \\ C_1-C_2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{3} \end{pmatrix},$$

即 $C_1=\dfrac{19}{12}$，$C_2=-\dfrac{1}{4}$. 故初值问题的解为

$$x_1=\frac{19}{12}\mathrm{e}^{3t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}-t\mathrm{e}^{-t}+\frac{2}{3},$$

$$x_2=\frac{19}{12}\mathrm{e}^{3t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+t\mathrm{e}^{-t}-\frac{4}{3}.$$

若相应的齐次方程组的通解已求得，则可直接用常数变易法来求非齐次方程组的解。仍以例 3 为例来讨论。

令

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{3t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix},$$

将之代入原方程组得

$$\mathrm{e}^{3t}C_1'(t)+\mathrm{e}^{-t}C_2'(t)=2,$$
$$\mathrm{e}^{3t}C_1'(t)-\mathrm{e}^{-t}C_2'(t)=2\mathrm{e}^{-t},$$

解之可得

$$C_1'(t)=\mathrm{e}^{-3t}+\mathrm{e}^{-4t},$$
$$C_2'(t)=\mathrm{e}^{t}-1.$$

因此有

$$C_1(t)=-\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{1}{4}e^{-4t}+C_1,$$

$$C_2(t)=e^t-t+C_2,$$

其中 C_1 与 C_2 为任意常数。故原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-te^{-t}-\frac{1}{4}e^{-t} \\ -\frac{4}{3}+te^{-t}-\frac{1}{4}e^{-t}. \end{pmatrix}。$$

用初始条件得

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ -\frac{19}{12} \end{pmatrix},$$

可以解得 $C_1=\frac{19}{12}, C_2=0$。故原初值问题的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{19}{12}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}-te^{-t}+\frac{2}{3} \\ \frac{19}{12}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}+te^{-t}-\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

与前面得到的结果相同。

（三）算子解法

对非齐次方程组(1)求特解，用算子解法有时是比较方便的，但此时解法与 n 阶方程情形的解法有些不同，将 $\frac{d}{dt}$ 换成 D，然后视微分方程组为代数方程组（只是未知数前系数含有 D），求出未知函数向量 $\boldsymbol{x}(t)$。这里以具体例子来说明此解法。

例 7 求解方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=2x_1-x_2-x_3, \\ \frac{dx_2}{dt}=3x_1-2x_2-3x_3, \\ \frac{dx_3}{dt}=-x_1+x_2+2x_3+3. \end{cases}$$

解 1° 用 D 代替 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，将上述微分方程组，得到类似于线性代数方程组的形式：

$$\begin{cases}(D-2)x_1+x_2+x_3=0,\\ -3x_1+(D+2)x_2+3x_3=0,\\ x_1-x_2+(D-2)x_3=3.\end{cases}$$

解这个方程组得

$$x_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & D+2 & 3\\ 3 & -1 & D-2\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}D-2 & 1 & 1\\ -3 & D+2 & 3\\ 1 & -1 & D-2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(3-D-2)3}{D^3-2D^2+D}=\frac{-(D-1)}{(D-1)^2D}\cdot 3=\frac{-1}{(D-1)D}\cdot 3$$

$$=(1+D+\cdots)\left(\frac{1}{D}\cdot 3\right)$$

$$=(1+D)3t=3t+3,$$

$$x_2=\begin{vmatrix}D-2 & 0 & 1\\ -3 & 0 & 3\\ 1 & 3 & D-2\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}D-2 & 1 & 1\\ -3 & D+2 & 3\\ 1 & -1 & D-2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-[3(D-2)+3]\cdot 3}{(D-1)^2D}=(-3)\cdot\left[\frac{1}{(D-1)D}\cdot 3\right]$$

$$=\frac{1}{1-D}9t=(1+D)9t=9t+9,$$

$$x_3=\begin{vmatrix}D-2 & 1 & 0\\ -3 & D+2 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}D-2 & 1 & 1\\ -3 & D+2 & 3\\ 1 & -1 & D-2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{[(D-2)(D+2)+3]\cdot 3}{(D-1)^2D}=\frac{D+1}{(D-1)D}\cdot 3$$

$$=-(D+1)[(1+D)3t]=-(D+1)(3t+3)$$

$$=-3t-6,$$

这样就求得了非齐次方程组的特解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+3 \\ 9t+9 \\ -3t-6 \end{pmatrix}.$$

注意用算子形式表示解时算子前后的顺序，例如

$$x_1 = \frac{-(D-1)}{D^3-2D^2+D}\cdot 3 = \frac{-(D-1)}{(D-1)^2 D}\cdot 3 = -\frac{1}{(D-1)}\left[\frac{1}{D}3\right],$$

但不能写成

$$x_1 = \frac{-3(D-1)}{D^3-2D^2+D},$$

或写成

$$x_1 = \frac{-(D-1)}{D(D-1)^2}\cdot 3 = -\frac{1}{D(D-1)}3 = \frac{1}{D}\cdot 3 = 3t + C_1$$

或者 $x_1 = 3t$，这些结果与前面 $x_1 = 3t+3$ 差一个常数项。

2° 求解原方程组对应的齐次方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 - x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 2x_2 - 3x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -x_1 + x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

其特征方程为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda-1)^2 = 0$，有单根零与二重根 1。令

$$\begin{cases} x_1 = A_1 + (B_1 + C_1 t)e^t, \\ x_2 = A_2 + (B_2 + C_2 t)e^t, \\ x_3 = A_3 + (B_3 + C_3 t)e^t, \end{cases}$$

将之代入齐次方程组得

$$e^t(B_1 + C_1 + C_1 t) = 2A_1 + 2(B_1 + C_1 t)e^t - A_2 - (B_2 + C_2 t)e^t$$
$$- A_3 - (B_3 + C_3 t)e^t,$$
$$e^t(B_2 + C_2 + C_2 t) = 3A_1 + 3(B_1 + C_1 t)e^t - 2A_2 - 2(B_2 + C_2 t)e^t$$
$$- 3A_3 - 3(B_3 + C_3 t)e^t,$$
$$e^t(B_3 + C_3 + C_3 t) = -A_1 - (B_1 + C_1 t)e^t + A_2 + (B_2 + C_2 t)e^t$$

$$+2A_3+2(B_3+C_3t)e^t.$$

比较 t 的同类项前系数得

$$\begin{aligned}
&2A_1-A_2-A_3=0,\\
&3A_1-2A_2-3A_3=0,\\
&-A_1+A_2+2A_3=0,\\
&B_1+C_1=2B_1-B_2-B_3,\\
&B_2+C_2=3B_1-2B_2-3B_3,\\
&B_3+C_3=-B_1+B_2+2B_3,\\
&C_1=2C_1-C_2-C_3,\\
&C_2=3C_1-2C_2-3C_3,\\
&C_3=-C_1+C_2+2C_3.
\end{aligned}$$

简化后得到

$$A_2=3A_1, A_3=-A_1, C_2+C_3=C_1, C_2+C_3=2C_1,$$

$$B_2+B_3=B_1-C_1=B_1-\frac{C_2}{3}=B_1+C_3,$$

最后可以取 A_1,B_1,B_2 为三个任意常数，其余均由它们表示，

$$C_1=0,\ C_2=0,\ C_3=0,\ B_3=B_1-B_2,$$

$$A_2=3A_1,\ A_3=-A_1.$$

于是齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1e^t\\ 3A_1+B_2e^t\\ -A_1+(B_1-B_2)e^t \end{pmatrix},$$

原非齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1+B_1e^t+3t+3\\ 3A_1+B_2e^t+9t+9\\ -A_1+(B_1-B_2)e^t-3t-6 \end{pmatrix}.$$

再以例 5 为例，将原方程组改写为

$$\begin{cases}(D-2)x_1-3x_2=2e^{2t},\\ 3x_1+(D-2)x_2=0.\end{cases}$$

分两步解：1° 求特解

$$x_1=\begin{vmatrix}2e^{2t} & -3\\ 0 & D-2\end{vmatrix}\bigg/\begin{vmatrix}D-2 & -3\\ 3 & D-2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{2(D-2)}{D^2-4D+13}e^{2t}$$

$$=2(D-2)\left[e^{2t}\frac{1}{(D+2)^2-4(D+2)+13}\cdot 1\right]$$

$$=2(D-2)\left[e^{2t}\frac{1}{D^2+9}\cdot 1\right]$$

$$=2(D-2)\left[\frac{1}{9}e^{2t}\right]=0,$$

$$x_2=\begin{vmatrix}D-2 & 2e^{2t}\\ 3 & 0\end{vmatrix}\bigg/\begin{vmatrix}D-2 & -3\\ 3 & D-2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{-1}{D^2-4D+13}\cdot 6e^{2t}=-\frac{2}{3}e^{2t}.$$

2° 求对应的齐次方程组的通解。特征方程的根为 $2\pm 3i$，令

$$\begin{cases}x_1=(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)e^{2t},\\ x_2=(D_1\cos 3t+D_2\sin 3t)e^{2t},\end{cases}$$

将之代入齐次方程组得

$$-3C_1\sin 3t+3C_2\cos 3t+2C_1\cos 3t+2C_2\sin 3t$$
$$=2C_1\cos 3t+2C_2\sin 3t+3D_1\cos 3t+3D_2\sin 3t,$$

比较 t 的同类项系数得

$$-3C_1+2C_2=2C_2+3D_2,$$
$$3C_2+2C_1=2C_1+3D_1.$$

故有 $D_2=-C_1, D_1=D_2$，所以齐次方程组的通解为

$$x_1=(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)e^{2t},$$
$$x_2=(C_2\cos 3t-C_1\sin 3t)e^{2t},$$

而原方程组的通解为

$$x_1=(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)e^{2t},$$

$$x_2=(C_2\cos 3t-C_1\sin 3t)e^{2t}-\frac{2}{3}e^{2t}.$$

作为练习，读者可以对例 6 中的方程组用算子解法求解。

(四)拉普拉斯变换解法

对非齐次方程组(1)还可以用拉普拉斯变换法求解，一般最好用于求初值问题，当然也可用来求通解和特解。令

$$\boldsymbol{X}(s)=L[\boldsymbol{x}(t)],\ \boldsymbol{F}(s)=L[\boldsymbol{f}(t)].$$

设 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，对(1)两边施行拉普拉斯变换得

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}_0=A\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{F}(s),$$

所以

$$(sI-A)\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{F}(s),$$

从而得

$$\boldsymbol{X}(s)=(sI-A)^{-1}[\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{F}(s)],$$

最后得出原方程组的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}[\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{F}(s)]\}.$$

例 8 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_1+4x_2+\mathrm{e}^t,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_1+x_2+\mathrm{e}^t,\\ x_1(0)=0,\ x_2(0)=0.\end{cases}$$

解 将原方程组与初值条件记为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\ \mathrm{e}^t\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

令

$$L[x_i(t)]=X_i(s),\ i=1,2.$$

对方程组两边施行拉普拉斯变换得

$$\begin{pmatrix}s-1 & -4\\ -1 & s-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L(\mathrm{e}^t)\\ L(\mathrm{e}^t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{1}{s-1}\end{pmatrix},$$

解得

$$X_1(s) = \left|\begin{matrix} \dfrac{1}{s-1} & -4 \\ \dfrac{1}{s-1} & s-1 \end{matrix}\right| \Bigg/ \left|\begin{matrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1+\dfrac{4}{s-1}}{(s-1)^2-4} = \frac{s+3}{(s-3)(s-1)(s-1)},$$

$$= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

$$= \frac{A(s-1)(s+1)+B(s-3)(s+1)+C(s-3)(s-1)}{(s-3)(s-1)(s+1)}.$$

所以

$$s+3 = A(s-1)(s+1)+B(s-3)(s+1)+C(s-3)(s-1),$$

令 $s=1$ 得 $B=-1$；令 $s=-1$ 得 $C=1/4$；令 $s=0$ 得 $3=-A-3B+3C$，即有 $A=3/4$。所以

$$X_1(s) = \frac{\dfrac{3}{4}}{s-3} + \frac{-1}{s-1} + \frac{\dfrac{1}{4}}{s+1}.$$

还原得

$$x_1(t) = L^{-1}[X_1(s)] = \frac{3}{4}e^{3t} - e^{t} + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

类似地解得

$$X_2(s) = \left|\begin{matrix} s-1 & \dfrac{1}{s-1} \\ -1 & \dfrac{1}{s-1} \end{matrix}\right| \Bigg/ \left|\begin{matrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{s-1}}{(s-3)(s+1)} = \frac{s}{(s-3)(s-1)(s+1)},$$

$$= \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

$$=\frac{A(s-1)(s+1)+B(s-3)(s+1)+C(s-3)(s-1)}{(s-3)(s-1)(s+1)},$$

即有

$$s=A(s-1)(s+1)+B(s-3)(s+1)+C(s-3)(s-1).$$

令 $s=1$ 得 $B=-1/4$；令 $s=-1$ 得 $C=-1/8$；令 $s=0$ 得 $0=-A-3B+3C$，即有 $A=3/8$．故得解

$$X_2(s)=\frac{\frac{3}{8}}{s-3}+\frac{-\frac{1}{4}}{s-1}+\frac{-\frac{1}{8}}{s+1}.$$

还原得

$$x_2(t)=L^{-1}[X_2(s)]=\frac{3}{8}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-t}.$$

所以原方程组的解为

$$x_1(t)=\frac{3}{4}e^{3t}-e^{t}+\frac{1}{4}e^{-t},$$

$$x_2(t)=\frac{3}{8}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-t}.$$

再以例 6 为例．此时有

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ f(t)=\begin{pmatrix}2\\ 2e^{-t}\end{pmatrix},\quad x_0=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

记 $X_i(s)=L[x_i(t)]$，$i=1,2$，对方程组两边施行拉普拉斯变换得

$$\begin{pmatrix}s-1 & -2\\ -2 & s-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(s)\\ X_2(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}+L\begin{pmatrix}2\\ 2e^{-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\left(1+\frac{1}{s}\right)\\ \frac{2}{s+1}\end{pmatrix},$$

求解得

$$X_1(s)=\begin{vmatrix}2\left(1+\frac{1}{s}\right) & -2\\ \frac{2}{s+1} & s-1\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}s-1 & -2\\ -2 & s-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{2(s-1)}{s(s-3)}+\frac{4}{(s-3)(s+1)^2}$$

$$=\left(\frac{\frac{2}{3}}{s}+\frac{\frac{4}{3}}{s-3}\right)+\left(\frac{\frac{1}{4}}{s-3}+\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{-1}{(s+1)^2}\right)$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{s}+\frac{\frac{19}{12}}{s-3}+\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{-1}{(s+1)^2},$$

还原得

$$x_1(t)=L^{-1}[X_1(s)]=\frac{2}{3}+\frac{19}{12}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}-te^{-t}.$$

类似地可解得

$$X_2(s)=\begin{vmatrix} s-1 & 2\left(1+\frac{1}{s}\right) \\ -2 & \frac{2}{s+1} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\frac{19}{12}}{s-3}+\frac{-\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{-\frac{4}{3}}{s},$$

还原得

$$x_2(t)=L^{-1}[X_2(s)]=\frac{19}{12}e^{3t}-\frac{1}{4}e^{-t}+te^{-t}-\frac{4}{3}.$$

习　　题

1. 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，且 A_1, A_2 是方阵，试证

$$e^{At}=\begin{pmatrix} e^{A_1t} & 0 \\ 0 & e^{A_2t} \end{pmatrix}.$$

2. 设 m 阶方阵 A 的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，试证 e^{At} 的特征根为 e^{λ_1t}，

$e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_m t}$。

3. 求解下列齐次线性方程组：

① $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=3x+4y,\end{cases}$

② $\begin{cases}\dot{x}+x-8y=0,\\ \dot{y}-x-y=0,\end{cases}$

③ $\begin{cases}\dot{x}=2y-3x,\\ \dot{y}=y-2x.\end{cases}$

④ $\begin{cases}\dot{x}=x-2y-z,\\ \dot{y}=y-x+z,\\ \dot{z}=x-z,\end{cases}$

⑤ $\begin{cases}\dot{x}=2x-y+z,\\ \dot{y}=x+2y-z,\\ \dot{z}=x-y+2z,\end{cases}$

⑥ $\begin{cases}\dot{x}=x-y-z,\\ \dot{y}=x+y,\\ \dot{z}=3x+z,\end{cases}$

⑦ $\begin{cases}\dot{x}=2x-y-z,\\ \dot{y}=3x-2y-3z,\\ \dot{z}=2z-x+y,\end{cases}$

⑧ $\begin{cases}\dot{x}=y-2z-x,\\ \dot{y}=4x+y,\\ \dot{z}=2x+y-z,\end{cases}$

4. 求解下列非齐次线性方程组：

① $\begin{cases}\dot{x}=y+1,\\ \dot{y}=2e^{t}-x,\end{cases}$

② $\begin{cases}\dot{x}=y-5\cos t,\\ \dot{y}=2x+y,\end{cases}$

③ $\begin{cases}\dot{x}=2x-4y+4e^{-2t},\\ \dot{y}=2x-2y,\end{cases}$

④ $\begin{cases} \dot{x}=2x-y, \\ \dot{y}=y-2x+18t, \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \dot{x}=4x-3y+\sin t, \\ \dot{y}=2x-y-2\cos t, \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} \dot{x}=x+2y+16te^t, \\ \dot{y}=2x-2y, \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} \dot{x}=2x-y, \\ \dot{y}=x+2e^t, \end{cases}$

5. 求解下列方程组

① $\begin{cases} \ddot{x}=2x-3y, \\ \ddot{y}=x-2y, \end{cases}$

② $\begin{cases} 2\dot{x}-5\dot{y}=4y-x, \\ 3\dot{x}-4\dot{y}=2x-y, \end{cases}$

③ $\begin{cases} \ddot{x}=3x-y-z, \\ \ddot{y}=-x+3y-z, \\ \ddot{z}=-x-y+3z, \end{cases}$

④ $\begin{cases} 2\ddot{x}+2\dot{x}+x+3\ddot{y}+\dot{y}+y=0, \\ \ddot{x}+4\dot{x}-x+3\ddot{y}+2\dot{y}-y=0. \end{cases}$

6. 用常数变易法求解下列方程组：

① $\begin{cases} \dot{x}=y+\operatorname{tg}^2 t-1, \\ \dot{y}=-x+\operatorname{tg} t, \end{cases}$

② $\begin{cases} \dot{x}=-4x-2y+\dfrac{2}{e^t-1}, \\ \dot{y}=6x+y-\dfrac{3}{e^t-1}, \end{cases}$

③ $\begin{cases} \dot{x}=x-y+\dfrac{1}{\cos t}, \\ \dot{y}=2x-y. \end{cases}$

7. 对方程组$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}$，$A$分别为下面的给定形式，用$e^{At}$法求通解。

① $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

② $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

③ $A=\begin{pmatrix}2, & 1\\ 0, & 2\end{pmatrix}$.

④ $A=\begin{pmatrix}3, & -1\\ 2, & 0\end{pmatrix}$.

⑤ $A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

⑥ $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

⑦ $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

8. 求下列已给初值问题的解。

① $\begin{cases}Dx+(D+1)y=e^{-t},\\ 2Dx+(D+2)y=\sin t,\\ x(0)=-2,\\ y(0)=1.\end{cases}$

② $\begin{cases}(D+2)x+4y=4t+1,\\ (D-1)y+x=\dfrac{3}{2}t^2,\\ x(0)=0,\\ y(0)=0.\end{cases}$

③ $\begin{cases}(D-2)x-(D-2)y=1-2t,\\ (D^2+1)x+2Dy=0,\\ x(0)=0,\\ \dot{x}(0)=0,\\ y(0)=0.\end{cases}$

④ $\begin{cases} (D-16)x-14y-38z=-2e^{-t}, \\ (D+7)y+9x+18z=-3e^{-t}, \\ (D+11)z+4x+4y=2e^{-t}, \\ x(0)=0, \\ y(0)=0, \\ z(0)=0. \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} (D^2+1)x+y=5, \\ (D^2-3)y-4x=-3, \\ x(0)=\dot{x}(0)=0, \\ y(0)=\dot{y}(0)=0 \end{cases}$

第三章　线性变系数微分方程

§1　一阶变系数线性方程

现在考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(t)x+f(t), & (1)\\ x(t_0)=x_0. & (2)\end{cases}$$

称(1)为非齐次方程，它对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(t)x. \tag{3}$$

先来求解齐次方程(3)。列举三种解法如下：

解法 1　推广的欧拉指数法。

令　$x=\mathrm{e}^{\int^t\lambda(\xi)\mathrm{d}\xi}$，这里 $\lambda(\xi)$为待定函数。代入方程(3)得

$$\lambda(t)\mathrm{e}^{\int^t\lambda(\xi)\mathrm{d}\xi}=a(t)\mathrm{e}^{\int^t\lambda(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

即　$\lambda(t)=a(t)$。故(3)有通解

$$x=C\mathrm{e}^{\int^t a(\xi)\mathrm{d}\xi}, \tag{4}$$

其中 C 是任意常数，满足(3)与(2)的初值问题的解为

$$x=x_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(\xi)d(\xi)}. \tag{5}$$

解法 2　分离变量法。

把方程(3)写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=a(t)\mathrm{d}t,$$

积分之得

$$\ln|x|=\int^t a(\xi)\mathrm{d}\xi+\ln|C|,$$

即 $$x = Ce^{\int^t a(\xi)d\xi},$$
其中 C 是任意常数.

解法 3 化为全微分方程.

把方程(3)改写为

$$\left(\frac{dx}{dt} - a(t)x\right)e^{-\int^t a(\xi)d\xi} = 0,$$

或写成

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{-\int^t a(\xi)d\xi}\right) = 0,$$

从而

$$xe^{-\int^t a(\xi)d\xi} = C,$$

其中 C 为任意常数. 所以

$$x = C\,e^{\int^t a(\xi)d\xi}.$$

下面给出非齐次方程的初值问题的解的公式. 我们令

$x = c(t)e^{\int^t a(\xi)d\xi}$, 代入非齐次方程(1),

得

$$C'(t)e^{\int^t a(\xi)d\xi} = f(t),$$

或写为

$$C'(t) = e^{-\int^t a(\xi)d\xi}f(t),$$

积分得

$$C(t) = \int^t e^{-\int^t a(\xi)d\xi}f(t)dt.$$

故原非齐次方程的通解为

$$x = e^{\int^t a(\xi)d\xi}\cdot\int^t e^{-\int^\eta a(\xi)d\xi}f(\eta)d\eta. \tag{6}$$

初值问题(1)与(2)的解为

$$x = e^{\int_{t_0}^t a(\xi)d\xi}\cdot\left[x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\eta a(\xi)d\xi}f(\eta)\,d\eta\right]. \tag{7}$$

在具体求解时, 自然可以直接代公式(6)或(7), 有时就具体问题

按照上述推导方法求非齐次方程的通解更方便些。

§2 二阶变系数线性方程

现在考虑形如

$$a_2(t)x''+a_1(t)x'+a_0(t)x=0 \tag{1}$$

和

$$a_2(t)x''+a_1(t)x'+a_0(t)x=f(t) \tag{2}$$

的二阶变系数线性微分方程，其中 $a_2(t)\neq 0, a_1(t), a_0(t)$ 和 $f(t)$ 都是已知函数。此时初值条件为

$$x(t_0)=x_0,\ x'(t_0)=x_0'。\tag{3}$$

与一阶情形不同的是，仅只有少量的二阶方程类型可以直接求得分析形式的解，更多的类型是很难求得解的分析表达式，甚至有的不能求得解的分析形式。下面就几种可以求得分析表达式的解之二阶方程类型进行讨论。

1° 可以常系数化的方程类型。

欧拉方程是如下形式的方程：

$$a_2t^2x''+a_1tx'+a_0x=f(t), \tag{4}$$

这里 a_0, a_1, a_2 均为常数，且 $a_2\neq 0$，设 $t>0$，又 $f(t)$ 是 $(0,\infty)$ 上的连续函数。

令 $\tau=\ln t$，即 $t=e^\tau$，则有

$$t\frac{dx}{dt}=t\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=t\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{1}{t}=\frac{dx}{d\tau},$$

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}=t^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{dx}{d\tau}\right)=t^2\left[\left(-\frac{1}{t^2}\right)\frac{dx}{d\tau}+\frac{1}{t}\frac{d^2x}{d\tau^2}\frac{d\tau}{dt}\right]$$

$$=-\frac{dx}{d\tau}+\frac{d^2x}{d\tau^2},$$

代入方程(4)得

$$a_2\frac{d^2x}{d\tau^2}+(a_1-a_2)\frac{dx}{d\tau}+a_0x=f(e^\tau)。\tag{5}$$

上式是常系数的线性方程，未知函数仍记为 $x(\tau)$，自变量已换成 τ。求解(5)，再用 $\tau=\ln t$ 代回去得方程(4)的解 $x(t)$。

例 1 求解方程

$$t^2x''-2x=t. \tag{6}$$

解 先求相应的齐次方程

$$t^2x''-2x=0$$

的通解。令 $\tau=\ln t$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}-2x=0,$$

对应的特征方程为 $\lambda^2-\lambda-2=0$，它有特征根 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-1$，故有通解

$$x=C_1\mathrm{e}^{2\tau}+C_2\mathrm{e}^{-\tau}=C_1t^2+C_2\frac{1}{t},$$

其中 C_1 与 C_2 为任意常数。

① 用常数变易法求特解

先把原方程(6)改写为等价的方程组形式，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{2}{t^2}x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

这里有 $x_1=x(t)$，$x_2=x'(t)$。对应的齐次方程组的解中常数 C_1 与 C_2 分别用 $C_1(t)$ 与 $C_2(t)$ 代替，即令(7)的解为

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ 2t & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}.$$

将之代入(7)得

$$\begin{pmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ 2t & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix},$$

解之得

$$C_1'(t)=\frac{1}{3t^2},\ C_2'(t)=-\frac{t}{3},$$

积分后有

$$C_1(t)=-\frac{1}{3t}+C_1,\ C_2(t)=-\frac{t^2}{6}+C_2,$$

其中 C_1 与 C_2 为任意常数。从而方程(6)的解为

$$x(t)=x_1(t)=C_1t^2+C_2\frac{1}{t}-\frac{t}{2}.$$

② 用待定系数法。

令（6）的特解为 $\tilde{x}=At$，这里 A 为待定系数，将之代入(6)得 $-2At=t$，即有 $A=-\frac{1}{2}$，故得(6)的特解为 $\tilde{x}=-\frac{1}{2}t$，所以(6)的通解为

$$x=C_1t^2+C_2\frac{1}{t}-\frac{1}{2}t,$$

其中 C_1，C_2 是任意常数。这里所以令 $\tilde{x}=At$，是因为在变换 $\tau=\ln t$ 之下，(6)化为

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}-2x=e^{\tau},$$

令 $\tilde{x}=Ae^{\tau}$，则可得 $A=-\frac{1}{2}$，代回原来变量 t，即得

$$\tilde{x}=At=-\frac{1}{2}t.$$

2° 可以降阶的方程类型。

① 若方程(4)中缺少 x 的项，即为

$$a_2(t)x''+a_1(t)x'=f(t).$$

可以令 $x'=y$，则化为降低一阶的方程，即为一阶方程

$$a_2(t)y'+a_1(t)y=f(t).$$

把它改写为

$$y'+\frac{a_1(t)}{a_2(t)}y=\frac{f(t)}{a_2(t)}.$$

就化成本章§1中讨论过的类型.求得 y 后,再将之积分,可以求得 x.

② 若在方程(4)中已知一个特解 $x_1(t)$,先将(4)改写为

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{8}$$

则(4)的通解为(即全部解为)

$$x = x_1\left[C_1 + C_2\int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{x_1^2(t)} dt \right], \tag{9}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

事实上,设 $x(t)$ 是(8)的任意一个解,令 $y = x_1x' - xx_1'$,则由于 $x_1(t)$ 与 $x(t)$ 都满足(8),可得

$$x_1'' + p(t)x_1' + q(t)x_1 = 0,$$
$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

将两式适当组合可得

$$(x_1x'' - xx_1'') + p(t)(x_1x' - x_1'x) = 0,$$

即

$$\frac{d}{dt}(x_1x' - xx_1') + p(t)(x_1x' - x_1'x) = 0,$$

或

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0, \quad y = x_1x' - xx_1'.$$

故存在常数 C_2 使

$$y = C_2e^{\int p(t)dt},$$

因此,$x(t)$ 满足下面的一阶方程

$$x_1x' - xx_1' = C_2e^{-\int p(t)dt},$$

将之改写为

$$\frac{x_1x' - xx_1'}{x_1^2} = C_2\frac{e^{-\int p(t)dt}}{x_1^2},$$

所以

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{x_1}\right) = C_2\frac{e^{-\int p(t)dt}}{x_1^2},$$

故存在常数 C_1 使

$$x=x_1\left[C_1+C_2\int\frac{e^{-\int p(t)dt}}{x_1^2(t)}dt\right].$$

这样就得出(9)是(8)的全部解。

例 2 求解方程

$$t^2x''-2x=0\qquad(t>0).$$

解 现在 $p=0$，$q=-2/t^2$，首先能找到一个特解 $x=t^2$，故它的全部解为

$$x=t^2\left[C_1+\tilde{C}_2'\int\frac{e^{-\int 0dt}}{t^4}dt\right]=C_1t^2+\tilde{C}_2t^2\left(-\frac{1}{3t^3}\right)$$

$$=C_1t^2+C_2\frac{1}{t},$$

其中 C_1 与 C_2 是任意常数。

3° 可用幂级数法求解的方程类型

幂级数解法的理论基础是下面的定理 1 与定理 2：

定理 1 对于方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0,$$

若 $p(t),q(t)$ 在 $|t|<r$ 内有收敛的幂级数，则存在在 $|t|<r$ 中收敛的幂级数解

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^k.$$

定理 2 对于方程

$$t^2x''+ta(t)x'+b(t)x=0,$$

若 $a(t),b(t)$ 在 $|t|<r$ 内有收敛的幂级数，则存在幂级数解

$$x(t)=t^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^k\qquad(C_0\neq0),$$

ρ 是由一个"指示方程"确定的实常数，级数 $\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^k$ 在 $|t|<r$ 内也收敛。

这两个定理的证明要用到复变函数论的知识，这里从略。

幂级数解法就是针对不同的方程类型假设存在有关的幂级数形式的解，将之代入方程，比较 t 的同次幂项系数，得到幂级数中系数的递推公式，最后求得幂级数的解。现用下面例子加以说明。

例 3 求解方程

$$x'' - 2tx' - 4x = 0.$$

解 由定理 1 得解的幂级数形式为

$$x = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots.$$

令 $x(0) = 0$，$x'(0) = 1$，得 $C_0 = 0, C_1 = 1$。从而有

$$x(t) = t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \cdots + C_n t^n + \cdots,$$

$$x'(t) = 1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + \cdots + nC_n t^{n-1} + (n+1)C_{n+1} t^n + \cdots,$$

$$x''(t) = 2C_2 + 6C_3 t + \cdots + nC_n(n-1)t^{n-2} + (n+1)C_{n+1} n \cdot t^{n-1} + (n+2)C_{n+2}(n+1)t^n + \cdots,$$

将它们代入原方程，比较 t 的同次幂系数得

$$C_2 = 0,\ C_4 = 0, \cdots, C_{2k} = 0,$$

$$6C_3 - 2 - 4 = 0,\ C_3 = 1,$$

$$C_5 = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}, \cdots, C_{2k+1} = \frac{1}{k} C_{2k-1} = \frac{1}{k!}.$$

一般地有递推式

$$(n+2)(n+1)C_{n+2} - 2(n+2)C_n = 0,$$

即

$$C_{n+2} = \frac{2}{n+1} C_n.$$

故

$$x(t) = t + t^3 + \frac{1}{2!} t^5 + \cdots + \frac{1}{k!} t^{2k+1} + \cdots$$

$$= t\left[1 + t^2 + \frac{1}{2!} t^4 + \cdots + \frac{1}{k!} (t^2)^k + \cdots\right] = te^{t^2}.$$

这就是原方程满足初值条件 $x(0) = 0$，$x'(0) = 1$ 的解。

例 4 求解贝塞尔(Bessel)方程

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}+(t^2-m^2)x=0,$$

这里 m 为一个实数。

解 此时方程中系数满足定理 2 中的假设条件，故有如下形式的幂级数解：

$$x=t^\rho\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^{\rho+k},\ C_0\neq 0,$$

其中 ρ 是待定常数，C_k 也是待定的常数。我们有

$$x'=\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)C_kt^{\rho+k-1},$$

$$x''=\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)C_kt^{\rho+k-2},$$

将它们代入方程得

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)C_kt^{\rho+k}+\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)C_kt^{\rho+k}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^{\rho+k+2}-\sum_{k=0}^{\infty}m^2C_kt^{\rho+k}=0.$$

对指标 $k=0$ 有项$[\rho(\rho-1)+\rho-m^2]C_0t^\rho$，故有$(\rho^2-m^2)C_0=0$，而又因为 $C_0\neq0$，这样得到指示方程

$$\rho^2-m^2=0.$$

对指标 $k=1$ 有项 $[(\rho+1)^2-m^2]C_1t^{\rho+1}$。下面仅讨论 $\rho=m>0$ 的情形，因为$(m+1)^2-m^2\neq0$，所以 $C_1=0$，即一般地有 $C_{2k+1}=0$。对一般的指标 $k=n\geqslant2$，有项

$$\{[(\rho+n)(\rho+n-1)+(\rho+n)-m^2]C_n+C_{n-2}\}t^{\rho+n}=0,$$

即得通式

$$[(\rho+n)^2-m^2]C_n+C_{n-2}=0.$$

所以对于 $\rho=m>0$ 的情形，因 $C_{2k+1}=0$，故仅考虑 $n=2k$ 情形，即 $[(m+2k)^2-m^2]C_{2k}+C_{2k-2}=0$，从而有递推关系式

$$C_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}\cdot k!(m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)}C_0.$$

取

$$C_0=\frac{1}{2^m\Gamma(1+m)},$$

这样有

$$C_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{m+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(m+k+1)}.$$

注意到 Γ 函数的定义与性质

$$\Gamma(m)\overset{\text{def}}{=}\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}dx \quad (m>0\text{ 时}),$$

$$\Gamma(m)\overset{\text{def}}{=}\Gamma(m+1)/m \quad (m<0\text{ 时}),$$

$$\Gamma(k+1)=k! \quad (k\text{ 为正整数时}),$$

$$\Gamma(m+1)(m+1)\cdots(m+k)=\Gamma(m+k+1).$$

定义第一类贝塞尔函数为

$$J_m(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{m+2k},$$

它是贝塞尔方程的一个特解. 此外还可以定义第二类贝塞尔函数（又称为诺伊曼(Neumann)函数）

$$Y_m(t)=\frac{J_m(t)\cos m\pi-J_{-m}(t)}{\sin m\pi},$$

这里

$$J_{-m}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m}.$$

易知，对任意实数 m，$J_m(t)$ 与 $Y_m(t)$ 线性无关.

所以，贝塞尔方程的通解是

$$x=C_1J_m(t)+C_2J_{-m}(t).$$

例 5 求解方程

$$x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-n^2)y=0.$$

解 令 $\lambda x=t$，则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\lambda\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\lambda^2\frac{d^2y}{dt^2},$$

代入方程后可得

$$x^2\lambda^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+x\cdot\lambda\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(\lambda^2x^2-n^2)y=0,$$

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(t^2-n^2)y=0.$$

这已属贝塞尔方程的标准形式，故有通解

$$y=AJ_n(t)+BY_n(t)=AJ_n(\lambda x)+BY_n(\lambda x),$$

这里 A 与 B 是任意常数。

例 6 求解方程

$$y''+\mathrm{e}^{2x}y=0.$$

解 令 $t=\mathrm{e}^x$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^x,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

于是原方程可写为

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(t^2-0^2)y=0,$$

从而得出解为

$$y=C_1J_0(t)+C_2Y_0(t)=C_1J_0(\mathrm{e}^x)+C_2Y_0(\mathrm{e}^x).$$

上面两个例子说明，通过自变量的代换可以把某些方程化为贝塞尔方程。然后用贝塞尔函数表示它们的通解。

习　　题

1. 求解下列一阶线性变系数方程：

① $xy'-2y=2x^4$,

② $(2x+1)y'=4x+2y$,

③ $y=x(y'-x\cos x)$,

④ $(xy'-1)\ln x=2y$,

⑤ $xy'+(x+1)y=3x^2\mathrm{e}^{-x}$,

⑥ $(x+y)\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x+4\ln y\mathrm{d}y$,

⑦ $y' = \dfrac{1}{3x - y^2}$，

⑧ $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$，

⑨ $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$，

⑩ $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$，

⑪ $x\,\mathrm{d}x = (x^2 - 2y + 1)\,\mathrm{d}y$，

⑫ $x(\mathrm{e}^y - y') = -2$，

⑬ $x^2 y' - xy + x^2 y^2 = 4$，

⑭ $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$。

2．求解方程

$$y(x) = \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t + x + 1.$$

3．求解方程

$$\int_0^x (x - t)\, y(t)\,\mathrm{d}t = 2x + \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t.$$

4．试证方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = f(t)$ 在 $-\infty < t < +\infty$ 上有一个有界解，设 $|f(t)| \leqslant M$，$t \in (-\infty, +\infty)$，求出这个解，并证明如果函数 $f(t)$ 为周期函数，则所求出的解也是周期的。

5．设在方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a(t)x = f(t)$ 中，$a(t) \geqslant C > 0$，当 $t \to +\infty$ 时，$f(t) \to 0$。试证这个方程的每个解当 $t \to +\infty$ 时都趋于零。

6．解下列欧拉方程：

① $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$，

② $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$，

③ $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$，

④ $x^3 y''' + xy' - y = 0$，

⑤ $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$，

⑥ $(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$。

7．求解下列二阶线性变系数方程：

① $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$；

② $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$。

8．已知某些特解，求解下列方程：

① $xy''+2y'-xy=0$, $y_1=\dfrac{e^x}{x}$;

② $y''-2(1+\mathrm{tg}^2x)y=0$, $y_1=\mathrm{tg}\,x$;

③ $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0$;

④ $(x^2+1)y''-2y=0$;

⑤ $y''-y'\,\mathrm{tg}\,x+2y=0$, $y_1=\sin x$;

⑥ $xy'''-y''-xy'+y=0$, $y_1=x, y_2=e^x$;

⑦ $x^2(2x-1)y'''+(4x-3)xy''-2xy'+2y=0$,

$y_1=x$, $y_2=\dfrac{1}{x}$.

9. 如果已知方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的所有解及各自的一阶导数当 $x\to+\infty$ 时都趋于零，试问 $p(x)$ 是怎样的函数?

10. 证明，当 $q(x)<0$ 时，方程 $y''+p(x)y+q(x)y=0$ 的解不可能有正的极大值。

11. 用幂级数法求解下列方程：

① $\ddot{x}-t\dot{x}-x=0$;

② $\ddot{x}-tx=0$;

③ $t\ddot{x}+4\dot{x}+tx=0$;

④ $9t(1-t)\ddot{x}-12\dot{x}+4x=0$;

⑤ $t^2\ddot{x}+t\dot{x}+\left(9t^2-\dfrac{1}{25}\right)x=0$;

⑥ $t\ddot{x}+\dot{x}+g^2tx=0$.

（**提示**：令 $\xi=gt$）。

12. 讨论下列各函数组的线性相关性：

① t, $2t$, t^2;

② e^t, te^t, t^2e^t;

③ $4-t$, $2t-3$, $6t+8$;

④ 0, 1, t;

⑤ e^t, e^{2t}, e^{3t};

⑥ $\sqrt{t}$, $\sqrt{t+1}$, $\sqrt{t+2}$,

⑦ t, $|t|$, $2t+\sqrt{4t^2}$.

13. 已知下列各组基本解组，求相应的线性齐次方程：

① e^{t^2}, e^{-t^2};

② $\sin 3t$, $\cos 3t$;

③ e^t, te^t, e^{2t};

④ t, t^2, t^3;

⑤ t, $\sqrt{1-t^2}$;

⑥ $\dfrac{\sin t}{t}$, $\dfrac{\cos t}{t}$.

14. 如果方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p_1(t)\frac{dx}{dt}+p_2(t)x=0 \quad (p_2(t)<0)$$

的基本解组 x_1，x_2 适合关系式 $x_1x_2=1$，则系数 $p_1(t)$，$p_2(t)$ 必需满足什么关系？在这条件成立时求其通解。

15. 设 $x=x_1(t)$，$x=x_2(t)$是方程

$$\ddot{x}+a^2x=0(a>0)$$

分别满足初始条件

$$x_1(0)=0,\ \dot{x}_1(0)=1;\ x_2(0)=\frac{1}{a},\ \dot{x}_2(0)=0$$

的两个解，不具体求出 $x_1(t)$，$x_2(t)$而直接证明：

① $x_1^2(t)+x_2^2(t)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^2$,

② $\dot{x}_1(t)=ax_2(t)$, $\dot{x}_2(t)=-ax_1(t)$.

16. 证明可以用变换 $x=a(t)y$ 把二阶线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0$$

化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+r(t)y=0,$$

并求出 $a(t)$和$r(t)$。

§3 线性方程组初值问题解的存在唯一性

对于一阶线性方程，我们已具体求出全部解，因而得知初值问题解具有存在唯一性。对于二阶或高于二阶的线性方程以及方程组，能直接求出解的分析表达式的类型很少，这自然提出了下面的问题，若线性方程的系数 $a_0(t),a_1(t),\cdots,a_{n-1}(t)$ 均在 $\alpha<t<\beta$ 内连续可微，给定 $t_0\in(\alpha,\beta)$ 与数 $x_0,x_0',\cdots,x_0^{(n-1)}$，则 n 阶线性方程的初值问题

$$\begin{cases}x^{(n)}+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_1(t)x'+a_0(t)x=f(t), & (1)\\ x(t_0)=x_0,x'(t_0)=x_0',\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)} & (2)\end{cases}$$

的解是否存在且唯一？

下面考虑更一般的 n 个一阶线性方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t), & (3)\\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 & (4)\end{cases}$$

的解的存在唯一性问题。

对于 $A(t)\equiv A$ ($n\times n$ 常方阵)情形，我们已通过求出解的表达式而证明了解的存在唯一性。下面我们将通过构造逐次逼近迭代序列的一致收敛极限来证明解的存在性，通过一些积分不等式来证明解的唯一性。

定理 设 n 阶函数方阵 $A(t)$ 和 n 维函数向量 $\boldsymbol{f}(t)$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内连续，又给定 $t_0\in(\alpha,\beta)$ 与 n 维常向量 $\boldsymbol{x}_0$，则在区间 $\alpha<t<\beta$ 内，方程组(3)的满足初值条件(4)的解存在且唯一。

证 第一步，证明(3)满足初值条件(4)的解等价于积分方程组

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{f}(s)\}ds \tag{5}$$

的解。事实上，若 $\boldsymbol{x}(t)$ 是(3)的解，即有

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\equiv A(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t),$$

从 t_0 到 t 积分上式两端得

$$\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{f}(s)\}\mathrm{d}s,$$

由(4)得 $\boldsymbol{x}(t)$满足(5)．反之，若 $\boldsymbol{x}(t)$是(5)的解，则显见 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$，又在(5)的两端对 t 求导得 $\boldsymbol{x}(t)$是(3)的解。$\boldsymbol{x}(t)$之能够求导，是由于 $\boldsymbol{x}(t)$，$A(t)$，$\boldsymbol{f}(t)$ 皆连续，故(5)的右端之积分（从 t_0 到 t)仍是 t 的可导函数。

第二步，构造毕卡（Picard)逐次逼近序列如下：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_0(t)\equiv\boldsymbol{x}_0,\\
&\boldsymbol{x}_1(t)\equiv\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{f}(s)\}\mathrm{d}s,\\
&\cdots\cdots\\
&\boldsymbol{x}_{k+1}(t)\equiv\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}_k(s)+\boldsymbol{f}(s)\}\mathrm{d}s,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{6}$$

由于$\boldsymbol{x}_0(t)$在 $\alpha<t<\beta$ 内连续，得 $\boldsymbol{x}_1(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内也连续，再由数学归纳法可以证明，对任意自然数 k，$\boldsymbol{x}_k(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 内皆连续。因此，按(6)依次作出迭代序列是可行的。

第三步，证明上述构成的函数向量序列$\{\boldsymbol{x}_0(t),\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_k(t),\cdots\}$ 在区间 $\alpha<t<\beta$ 内内闭一致收敛，即对于任一闭子区间 $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$，当 $k\to+\infty$时，$\boldsymbol{x}_k(t)$ 在$[a,b]$上一致收敛，或等价地证明级数

$$\boldsymbol{x}_0(t)+[\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)]+\cdots+[\boldsymbol{x}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_k(t)]+\cdots$$

在$[a,b]$上一致收敛．为此来估计 $\|\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)\|$，$\|\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{x}_1(t)\|$，$\cdots$，$\|\boldsymbol{x}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_k(t)\|$，$\cdots$。记$M=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|A(t)\|$。当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，有

$$\|\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)\|=\left\|\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{f}(s)\}\,\mathrm{d}s\right\|$$

$$\leqslant M\|\boldsymbol{x}_0\|(b-a)+\int_a^b\|\boldsymbol{f}(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

记 $N=M\|\boldsymbol{x}_0\|(b-a)+\int_a^b\|\boldsymbol{f}(s)\|\mathrm{d}s$。于是，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

有

$$\|\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)\|\leqslant N.\tag{7}$$

又由 $\boldsymbol{x}_1(t)$ 与 $\boldsymbol{x}_2(t)$ 的定义可知

$$\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{x}_1(t)=\int_{t_0}^{t}A(s)[\boldsymbol{x}_1(s)-\boldsymbol{x}_0(s)]\mathrm{d}s,$$

所以，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，有

$$\|\boldsymbol{x}_2(t)-\boldsymbol{x}_1(t)\|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}\|A(s)\|\cdot\|\boldsymbol{x}_1(s)-\boldsymbol{x}_0(s)\|\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant M\left|\int_{t_0}^{t}N\mathrm{d}s\right|=NM|t-t_0|. \tag{8}$$

再由(8)与等式

$$\boldsymbol{x}_3(t)-\boldsymbol{x}_2(t)=\int_{t_0}^{t}A(s)[\boldsymbol{x}_2(s)-\boldsymbol{x}_1(s)]\mathrm{d}s$$

得到，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，有

$$\|\boldsymbol{x}_3(t)-\boldsymbol{x}_2(t)\|\leqslant M^2N\left|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|\mathrm{d}s\right|=\frac{NM^2}{2!}(t-t_0)^2.$$

用数学归纳法可以证明，若已经证明了，对 $a\leqslant t\leqslant b$，有

$$\|\boldsymbol{x}_k(t)-\boldsymbol{x}_{k-1}(t)\|\leqslant\frac{NM^{k-1}}{(k-1)!}|t-t_0|^{k-1}, \tag{9}$$

那末由等式

$$\boldsymbol{x}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_k(t)=\int_{t_0}^{t}A(s)[\boldsymbol{x}_k(s)-\boldsymbol{x}_{k-1}(s)]\mathrm{d}s$$

可证，当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时有

$$\|\boldsymbol{x}_{k+1}(t)-\boldsymbol{x}_k(t)\|\leqslant M\left|\int_{t_0}^{t}\|\boldsymbol{x}_k(s)-\boldsymbol{x}_{k-1}(s)\|\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant\frac{NM^k}{(k-1)!}\left|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|^{k-1}\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant\frac{NM^k}{k!}|t-t_0|^k.$$

因此不等式（9）对任意 $k=1,2,\cdots$ 都成立。从而对任何自然数 m 和 $t\in[a,b]$，成立不等式

$$\sum_{k=1}^{m}\|\boldsymbol{x}_k(t)-\boldsymbol{x}_{k-1}(t)\|\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{NM^{k-1}|t-t_0|^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{NM^{k-1}(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} \leqslant Ne^{M(b-a)}.$$

因此根据魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法，向量函数项级数

$$\boldsymbol{x}_0(t)+[\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_0(t)]+\cdots+[\boldsymbol{x}_k(t)-\boldsymbol{x}_{k-1}(t)]+\cdots \tag{10}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是一致收敛的。由于 $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$ 是任意的，所以级数(10)在(α,β)内内闭一致收敛，记它的和为 $\boldsymbol{x}(t)$，那末 $\boldsymbol{x}(t)$ 在(α,β)内是连续的。

第四步，因为当 $k\to\infty$时，$\boldsymbol{x}_k(t)$在$[a,b]$上一致收敛于 $\boldsymbol{x}(t)$，所以在(6)的两端取极限得

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}_k(s)+\boldsymbol{f}(s)\}\mathrm{d}s,$$

根据一致收敛性，上式右端极限号可以通过积分号，即得

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{f}(s)\}\mathrm{d}s \tag{11}$$

在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上成立。由于$[a,b]\subset(\alpha,\beta)$的任意性，得(11) 对于 $t\in(\alpha,\beta)$ 成立，即积分方程组(5) 存在解 $\boldsymbol{x}(t)$，它在 $\alpha<t<\beta$ 内连续，从而得证线性方程组初值问题(3)，(4)存在在区间 (α, β)内连续的解 $\boldsymbol{x}(t)$。

第五步，证明解的唯一性。设 $\boldsymbol{x}(t)$和 $\boldsymbol{x}^*(t)$在区间 $\alpha<t<\beta$ 内都是方程组(3)的解，且满足同样的初值条件(4)，即

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{f}(s)\}\mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{x}^*(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\{A(s)\boldsymbol{x}^*(s)+\boldsymbol{f}(s)\}\mathrm{d}s,$$

两式相减得

$$\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)=\int_{t_0}^{t}\{A(s)[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)]\}\mathrm{d}s. \tag{12}$$

记 $N=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|$，任意 $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$，由 (12) 得

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|\leqslant NM|t-t_0|.$$

把它代入(12)的右端得

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|\leqslant NM^2\left|\int_{t_0}^{t}(s-t_0)\,\mathrm{d}s\right|=\frac{NM^2}{2!}|t-t_0|^2.$$

逐次进行可得，对 $t\in[a,b]$ 有

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|\leqslant NM^k|t-t_0|^k/k!\quad(k=1,2,\cdots).$$

令 $k\to+\infty$，上式右端趋于零，所以

$$\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|=0,$$

即 $\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}^*(t)$ 在 $[a,b]$ 上成立。但是 $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$ 是任意的，所以得证初值问题(3)，(4)的解在 (α,β) 内是唯一的。

关于唯一性还有另一种利用积分不等式的证明方法，现介绍如下。令 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)$，则由 (12) 得

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_{t_0}^{t}A(s)\boldsymbol{y}(s)\mathrm{d}s.$$

现在 $t\geqslant t_0$ 情形下证明（对 $t\leqslant t_0$ 情形类似可证）。置 $\|\boldsymbol{y}(t)\|=u(t)$，则有

$$u(t)\leqslant M\int_{t_0}^{t}u(s)\mathrm{d}s,$$

令 $v(t)=\int_{t_0}^{t}u(s)\mathrm{d}s$，则 $v'(t)=u(t)$，故有

$$v'(t)\leqslant Mv(t),$$

或者写成

$$[v'(t)-Mv(t)]\mathrm{e}^{-M(t-t_0)}\leqslant 0.$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-M(t-t_0)}v(t)]\leqslant 0,$$

所以

$$\mathrm{e}^{-M(t-t_0)}v(t)\leqslant\mathrm{e}^{-M(t_0-t_0)}v(t_0)=0,$$

从而有

$$v(t)\leqslant 0.$$

但因 $t\geqslant t_0$，且 $u(s)\geqslant 0$，故 $v(t)\geqslant 0$。这样就有 $v(t)\equiv 0$。但 $u(t)=v'(t)$，即 $u(t)\equiv 0$，所以 $\boldsymbol{y}(t)\equiv 0$，$\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}^*(t)$，$t\in(\alpha,\beta)$。

注 1 要注意的是解存在的区间是开区间 (α,β)，以后将会证明

线性方程组的解的最大存在区间为开区间，若证得了解在闭区间上存在，则解必在比该闭区间大一些的开区间上存在。

注 2 在定理的证明中，取(α,β)中的任一闭区间$[a,b]$，这是因为只有在闭区间上连续函数才有界，才能估计解，从而可以得到一些不等式证明迭代序列的一致收敛性。

§4 线性方程组解的结构与求解

由于n阶线性变系数方程可以化为等价的线性变系数方程组，故我们下面仅仅建立线性方程组解的结构定理及求解公式。

为了要得到线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

满足初值条件

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{2}$$

的解的结构和通解公式，先来回顾一下$A(t)\equiv A$（n阶常方阵）的情形，此时通解为（对$\boldsymbol{f}(t)\equiv\boldsymbol{o}$情形）

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{c},$$

而e^{At}的第i列是以$\mathrm{e}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$为初始值向量（它的第$i$个元素为1，其余元素为0）的初值问题的解$\boldsymbol{x}^{(i)}(t)(i=1,2,\cdots,n)$。因为$\mathrm{e}^{At}$非异，即$\det(\boldsymbol{x}^{(1)}(t),\ \boldsymbol{x}^{(2)}(t),\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}(t))\neq 0$，因此$X(t)=\mathrm{e}^{At}=(\boldsymbol{x}^{(1)}(t),\boldsymbol{x}^{(2)}(t),\ \cdots,\ \boldsymbol{x}^{(n)}(t))$是方程组(1)对应的齐次方程组的基本解矩阵，而$\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$，$\boldsymbol{x}^{(2)}(t),\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}(t)$是$n$个线性无关的基本解组。现将这些结果推广到变系数情形。

我们有下面的结果。

定理 1 (i) 对于方程组 (1) 对应的齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x}(t), \tag{3}$$

必存在n个在(α,β)内线性无关的解向量$\boldsymbol{\varphi}_1(t)$，$\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$；

(ii) 若n个解向量$\boldsymbol{\varphi}_1(t)$，$\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$在$(\alpha,\beta)$上线性无

关，则矩阵

$$X(t)=(\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)) \tag{4}$$

构成(3)的基本解矩阵，且初值问题(3)，(2) 的解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=X(t)X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0. \tag{5}$$

一般地，(3) 的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=X(t)\boldsymbol{C}.$$

定义朗斯基（Wronsky）行列式$W(t)\equiv\det X(t)$，那末

$$X(t)\text{为基本解矩阵}\Longleftrightarrow W(t)\neq 0,\ t\in(\alpha,\beta) \tag{6}$$

$$\Longleftrightarrow \exists t_0\in(\alpha,\beta),\ W(t_0)\neq 0,$$

且有

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{tr}A(t)W(t), \tag{7}$$

其中 $\mathrm{tr}A(t)$为矩阵$A(t)$的对角线元素之和。即有

$$W(t)=W(t_0)\exp\left[\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(s)\,\mathrm{d}s\right], \tag{8}$$

$$A(t)=(a_{ij}(t))\qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

证 (i) 与常系数情形类似，任取 $t_0\in(\alpha,\beta)$，构成 n 个初值问题，$\boldsymbol{x}_i(t_0)=\boldsymbol{e}_i$，由 § 3 知存在方程组(3)的 n 个解向量 $\varphi_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$，分别满足 $\boldsymbol{\varphi}_i(t_0)=\boldsymbol{e}_i$。记 $[\boldsymbol{\varphi}_i(t)]^T=(\varphi_{i_1}(t),\varphi_{i_2}(t),\cdots,\varphi_{i_n}(t))$。

现来证 $\boldsymbol{\varphi}_1(t),\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ 线性无关。用反证法，若 $\boldsymbol{\varphi}_1(t)$，$\boldsymbol{\varphi}_2(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t)$ 线性相关，即存在不全为 0 的 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 使

$$\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{\varphi}_i(t)=\boldsymbol{0}\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{\varphi}_i(t_0)=\boldsymbol{0},$$

即有 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}$，所以 $C_i=0$，$i=1,2,\cdots,n$。矛盾。

(ii) 首先易验证 $\boldsymbol{x}(t)=X(t)\boldsymbol{C}$，$X(t)=(\boldsymbol{\varphi}_1(t),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t))$是(3)的解，且 $\det X(t)\neq 0$，即 $X(t)$ 为 (3) 的基本解矩阵。其次证对(3) 的任意一个解$\boldsymbol{x}(t)$，一定存在常向量 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{x}(t)=X(t)\boldsymbol{C}$。取 $t_0\in(\alpha,\beta)$。因为 $\boldsymbol{\varphi}_1(t_0)$，$\boldsymbol{\varphi}_2(t_0),\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n(t_0)$ 是 n 个线性无关向量，因此对任一常向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$，存在常向量 $\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,\cdots,C_n)^T$，使

$x(t_0)=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(t_0)$。就取这个常向量 $\boldsymbol{C}$，构造新的向量 $\boldsymbol{y}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{\varphi}_i(t)$。下面证 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t)$。事实上，显然有 $\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0)$，故由§3的定理知满足同样初值条件 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 的方程组(3) 的解是唯一的，即 $\boldsymbol{y}(t)\equiv\boldsymbol{x}(t),t\in(\alpha,\beta)$。所以 $\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i\boldsymbol{\varphi}_i(t)$，对 $t\in(\alpha,\beta)$ 成立。

有了通解 $\boldsymbol{x}(t)=X(t)\boldsymbol{C}$，将初值条件代入即知 $\boldsymbol{x}(t_0)=X(t_0)\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{C}=X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$，也就得初值问题(3)，(2) 的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=X(t)X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0).$$

为证明公式(7)与(8)，先计算导数 $\dfrac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}$，根据行列式的定义及和、积的导微公式，可以得出

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{vmatrix}\dot\varphi_{11}(t) & \dot\varphi_{12}(t) & \cdots & \dot\varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}+\cdots$$

$$+\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dot\varphi_{n1}(t) & \dot\varphi_{n2}(t) & \cdots & \dot\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}, \tag{9}$$

(9) 式中的右边有 n 个行列式，第一个行列式等于 $a_{11}(t)W(t)$，依次得第 k 个行列式等于 $a_{kk}(t)W(t)$。这样由(9)式就得证(7)。

由(7)易解得(8)，且易知(6)成立。证毕。

公式(8)称之为刘维尔(Liouville)公式。

定理 2 非齐次方程组(1)的通解公式为

$$\boldsymbol{x}(t)=X(t)\boldsymbol{C}_0+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{10}$$

而初值问题 (1)，(2) 的解可以表为

$$\boldsymbol{x}(t)=X(t)X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s, \qquad (11)$$

其中 $X(t)$ 为相应于(1)的齐次方程组(3)的基本解矩阵.

证 用常数变易法证明. 与 $A(t)\equiv A$(n阶常方阵)情形类似, 可以令(1)的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=X(t)\boldsymbol{C}(t),$$

将之代入方程(1)得

$$X(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t).$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}(t)}{\mathrm{d}t}=X^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t),$$

两边积分得

$$\boldsymbol{C}(t)=\int_{t_0}^{t}X^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s+\boldsymbol{C}_0,$$

故(1)的通解公式为

$$\boldsymbol{x}(t)=X(t)\boldsymbol{C}_0+X(t)\int_{t_0}^{t}X^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

定理 2 的前半部分得证.

将初始条件(2)代入(10)得到

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(t_0)=X(t_0)\boldsymbol{C}_0,\ \ \boldsymbol{C}_0=X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0,$$

因此初值问题(1), (2)的解公式为(11). 定理 2 证毕.

公式(11)可改写为如下形式:

$$\boldsymbol{x}(t)=U(t,t_0)\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}U(t,s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s.$$

其中 $U(t,t_0)=X(t)X^{-1}(t_0)$ 称为转移矩阵.

关于转移矩阵 $U(t,t_0)$, 有下述性质:

(i) $U(t,t)=I$ (单位方阵);

(ii) $U(t,s)\cdot U(s,\tau)=U(t,\tau)$;

(iii) $U^{-1}(t,s)=U(s,t)$.

这些性质的证明是容易的, 留给读者作为练习. 对线性常系数方程组,

有 $U(t,s)=e^{A(t-s)}$。

若 $X(t_0)=E$，E 为单位阵，且 $X(t)$ 为方程组(3) 的基本解矩阵，则称 $X(t)$ 为标准的基本解矩阵，此时 $U(t,t_0)=X(t)$。

二阶线性变系数方程可以化为线性变系数方程组，其中

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}x_0\\x_0'\end{pmatrix},\ \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}0\\f(t)\end{pmatrix},$$

这里 $x(t_0)=x_0, x'(t_0)=x_0'$。下面推导二阶方程的常数变易公式。

设解 $x_1(t;t_0)$ 是二阶齐次方程的满足如下初始条件

$$x_1(t_0;t_0)=1,\ x_1'(t_0;t_0)=0$$

的解。又设 $x_2(t;t_0)$ 是二阶齐次方程的满足初始条件

$$x_2(t_0;t_0)=0,\ x_2'(t_0;t_0)=1$$

的解，则转移矩阵为

$$U(t;t_0)=X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t;t_0) & x_2(t;t_0)\\x_1'(t;t_0) & x_2'(t;t_0)\end{pmatrix},$$

故有常数变易公式

$$\begin{pmatrix}x\\x'\end{pmatrix}=U(t;t_0)\begin{pmatrix}x_0\\x_0'\end{pmatrix}+\int_{t_0}^{t}U(t;s)\begin{pmatrix}0\\f(s)\end{pmatrix}ds$$

因为现在只需求解二阶方程，所以只要写出表示 x 的公式

$$x(t)=x_1(t;t_0)x_0+x_2(t;t_0)x_0'+\int_{t_0}^{t}x_2(t,s)f(s)\,ds. \tag{12}$$

注意以前在常系数线性方程的情形，常数变易公式中积分项的核函数用 $k(t-s)$ 来记的，它是二阶线性齐次方程的解，且满足 $k(0)=0$，$k'(0)=1$，这个函数实际上就是式(12)中的 $x_2(t,s)$。

例 1 求解方程 $t^2x''-2x=t\ (t>0)$。

解 先化为等价的方程组

$$\begin{cases}x_1'=x_2\\[2ex] x_2'=\dfrac{2}{t^2}x_1+\dfrac{1}{t}.\end{cases} \tag{13}$$

下面用三种方法求解，这些方法都要用到(13)对应的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = \dfrac{2}{t^2} x_1 \end{cases} \tag{14}$$

的基本解矩阵或两个线性无关解。

由§2知，t^2 与 $1/t$ 是原方程对应的齐次方程的两个线性无关解，且基本解矩阵为

$$X(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \dfrac{1}{t} \\ 2t & -\dfrac{1}{t^2} \end{pmatrix}.$$

解法一 用常数变易法。令

$$\boldsymbol{x}(t) = X(t)\boldsymbol{C}(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \dfrac{1}{t} \\ 2t & -\dfrac{1}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix},$$

将之代入方程组(13)得到

$$\begin{pmatrix} t^2 & \dfrac{1}{t} \\ 2t & -\dfrac{1}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{t} \end{pmatrix},$$

解得

$$C_1'(t) = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{t} \\ \dfrac{1}{t} & -\dfrac{1}{t^2} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} t^2 & \dfrac{1}{t} \\ 2t & -\dfrac{1}{t^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3t^2},$$

$$C_2'(t) = \begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & \dfrac{1}{t} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} t^2 & \dfrac{1}{t} \\ 2t & -\dfrac{1}{t^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}t,$$

积分之，得到 $C_1(t) = -\dfrac{1}{3t} + C_1$，$C_2(t) = -\dfrac{t^2}{6} + C_2$。所以

$$x(t)=C_1(t)t^2+C_2(t)\cdot\frac{1}{t}=C_1t^2+C_2\frac{1}{t}-\frac{t}{2}.$$

解法二 用常数变易公式求解。注意到齐次方程的通解为$C_1t^2+C_2\frac{1}{t}$，现用公式法求非齐次方程的特解：

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}^*=\int_1^t X(t)X^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\,\mathrm{d}s,$$

所以

$$\tilde{x}^*=\tilde{x}_1^*=\int_1^t\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{s}\left(-\frac{t^2}{s}+\frac{s^2}{t}\right)\mathrm{d}s=\frac{t^2}{3}+\frac{1}{6t}-\frac{1}{2}t.$$

去掉齐次方程的通解中包含的项$\frac{t^2}{3}+\frac{1}{6t}$，得非齐次特解为$-\frac{1}{2}t$。这里用到

$$X(t)=\begin{pmatrix}t^2 & \frac{1}{t}\\ 2t & -\frac{1}{t^2}\end{pmatrix},\quad X^{-1}(s)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{s^2} & -\frac{1}{s}\\ -2s & s^2\end{pmatrix}.$$

注意这里求$X^{-1}(s)$较复杂。把齐次方程通解与非齐次方程特解叠加起来就得到非齐次方程的通解。

解法三 用形如（12）的常数变易公式，这是一个直接形式的公式。

先求解初值问题

$$\begin{cases}t^2K''_{tt}(t,s)-2K(t,s)=0,\\ K(t,s)|_{t=s}=0,\\ K'_t(t,s)|_{t=s}=1,\end{cases}$$

从齐次方程的通解出发，用常数变易法，令

$$K(t,s)=C_1(s)t^2+C_2(s)\frac{1}{t},$$

由初始条件得

$$0=K(t,s)|_{t=s}=C_1(s)s^2+C_2(s)\frac{1}{s},$$

$$1=K_t(t,s)|_{t=s}=2C_1(s)s-C_2(s)\frac{1}{s^2}.$$

解得 $C_1(s)=\frac{1}{3s}$, $C_2(s)=-\frac{1}{3}s^2$，故有

$$K(t,s)=\frac{1}{3s}t^2-\frac{1}{3t}s^2.$$

非齐次方程的特解为

$$\tilde{x}=\int_1^t K(t,s)f(s)\mathrm{d}s=\int_1^t\left(\frac{1}{3s}t^2-\frac{1}{3t}s^2\right)\frac{1}{s}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{t^2}{3}+\frac{1}{6t}-\frac{1}{2}t,$$

因此，原方程的通解为

$$x=C_1t^2+C_2\frac{1}{t}-\frac{1}{2}t.$$

例 2 设线性齐次方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_{11}(t)x+a_{12}(t)y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a_{21}(t)x+a_{22}(t)y\end{cases}$$

有一个基本解矩阵 $X(t)=\begin{pmatrix}e^t & \sin t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(i) 求 $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2)$;

(ii) 求转移矩阵 $U(t,s)$,并证明它与基本解矩阵的选取无关;

(iii) 求解初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_{11}(t)x+a_{12}(t)y+te^t,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a_{21}(t)x+a_{22}(t)y, \end{cases} \qquad (15)$$

$$x(0)=y(0)=1. \qquad (16)$$

解 (i) 将$(x,y)=(e^t,0)$代入齐次方程组,得

$$e^t = a_{11}(t)e^t \Longrightarrow a_{11}(t) = 1,$$
$$0 = a_{21}(t)e^t \Longrightarrow a_{21}(t) = 0,$$

又将$(x,y)=(\sin t,1)$代入齐次方程组，得

$$\cos t = \sin t + a_{12}(t) \Longrightarrow a_{12}(t) = \cos t - \sin t,$$
$$0 = \sin t \cdot a_{21}(t) + a_{22}(t) \Longrightarrow a_{22}(t) = 0,$$

所以

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos t - \sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) 转移矩阵为

$$U(t,s) = X(t)X^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^t & \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{e^s} & -\frac{\sin s}{e^s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{t-s} & -e^{t-s}\sin s + \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对任意基本解矩阵 $\tilde{X}(t)$，存在非异常数矩阵 $C(\det C \neq 0)$使 $\tilde{X}(t) = X(t)C$，故$\tilde{X}^{-1}(s) = C^{-1}\tilde{X}^{-1}(s)$，而$\tilde{X}(t)\tilde{X}^{-1}(s) = X(t)C \cdot C^{-1}X^{-1}(s) = X(t)X^{-1}(s)$，所以，$U(t,s)$与基本解矩阵的选取无关。

(iii) 用常数变易公式求解初值问题(15)，(16)，得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{t-s}, & -e^{t-s}\sin s + \sin t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} se^s \\ 0 \end{pmatrix} ds$$
$$= \begin{pmatrix} e^t + \sin t \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} e^t s \\ 0 \end{pmatrix} ds$$
$$= \begin{pmatrix} e^t + \sin t + \frac{t^2}{2}e^t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

最后，我们讨论 n 阶变系数线性方程的求解。以下是几种可以求解的方程类型：

(i) 欧拉方程——可常系数化的类型；

讨论如下形式的方程：

$$t^n a_n x^{(n)}+t^{n-1}a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+ta_1x'+a_0x=f(t)\ (t>0),$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$，$a_n\neq 0$ 都是常数．令 $\tau=\ln t$，则可以用归纳法证明 $t^k x^{(k)}$ 可用 x，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\cdots,\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}\tau^k}$ 组合表示，最后就化为 n 阶常系数的线性方程，但自变量要换成 τ，未知函数仍记为 $x(\tau)$。

例 3 求解方程

$$t^3x'''-t^2x''+2tx'-2x=0\qquad(t>0)。$$

解 令 $\tau=\ln t$ 则 $x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$,

$$x''=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right),$$

$$x'''=\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}=\frac{1}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3}-3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}+2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right),$$

原方程就化为常系数线性方程：

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3}-4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}+5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}-2x=0.$$

它的特征方程为

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0,$$

特征根 $\lambda_1=2$（单重），$\lambda_2=\lambda_3=1$（两重根）．可得后一方程的解

$$x=C_1\mathrm{e}^{2\tau}+(C_2\tau+C_3)\mathrm{e}^{\tau},$$

还原得原方程的解

$$x=C_1t^2+(C_2\ln t+C_3)t.$$

(ii) 已知方程的 k 个特解 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)\ (n>k\geqslant 1)$，由变换

$$x=x_1(t)\int y_1\mathrm{d}t,$$

可以将原方程化为关于新的未知函数 y_1 的 $n-1$ 阶方程，再作变换

$$y_1=x_2(t)\int y_2\mathrm{d}t,$$

则上述关于 y_1 的方程又可以化为关于新的未知函数 y_2 的 $n-2$ 阶方

程，依次作类似的变换 $y_2 = x_3(t)\int y_3 \mathrm{d}t, \cdots, y_{k-1} = x_k(t)\int y_k \mathrm{d}t$，则最后化为关于新的未知函数 y_k 的 $n-k$ 阶方程，这种方法称为降阶法，而方程的类型称为可降阶的方程。

习　题

1．求下列方程组的通解：

① $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{y}{t}, \\ \dot{y} = -tx. \end{cases}$

② $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{t}, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

③ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{-tx + y}{t^2 + 1}, \\ \dot{y} = \dfrac{-x - ty}{t^2 + 1} \end{cases}$

④ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x - y}{t}, \\ \dot{y} = \dfrac{x + y}{t}. \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} t^2 \dot{x} = -x - 2y, \\ t^2 \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} \dot{x} - x\cos t = 0, \\ \dot{y} - xe^{-\sin t} = 0. \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} \dot{x} = -xf'(t) + yg'(t), \\ \dot{y} = -xg'(t) - yf'(t). \end{cases}$

⑧ $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x} + y \\ \dot{y} = \left(\dfrac{2}{t^2} - \dfrac{1}{t} - 1\right)\dot{x} - \left(\dfrac{1}{t} + 1\right)y - \dfrac{2}{t^3}x. \end{cases}$

⑨ $\begin{cases} t\dot{x} = x + y, \\ t\dot{y} = y, \\ t\dot{z} = -z. \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} t\ddot{x} + 2\dot{x} + tx = 0, \\ t\dot{y} + 2y - t\dot{x} = 0. \end{cases}$

（**提示**：令$u = tx$）

⑪ $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{t}, \\ \dot{y} = \dfrac{t + x}{t}. \end{cases}$

⑫ $\begin{cases} t^2\dot{x} + y = t^2, \\ \dot{y} + x = t. \end{cases}$

⑬ $\begin{cases} t\dot{x} + 2(x - y) = t, \\ t\dot{y} + x + 5y = t^2. \end{cases}$

⑭ $\begin{cases} \dot{x} + y = 1, \\ t^2\dot{y} + 3x = t^2 \ln t. \end{cases}$

⑮ $\begin{cases} t^2\ddot{x} + t\dot{y} + x + y = t + 1, \\ t^2\ddot{y} + t\dot{x} - x - y = -t - 1. \end{cases}$

2．求已给初值问题的解：

① $\begin{cases} t\dot{x} + y = 0, \\ t\dot{y} + x = 0, \\ x(1) = 2,\ y(1) = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} \dot{x} = 1 - \dfrac{2}{t}x, \\ \dot{y} = x + y - 1 + \dfrac{2}{t}x, \\ x(1) = \dfrac{1}{3},\ y(1) = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

③ $\begin{cases} t\dot{x} = -x + ty, \\ t^2\dot{y} = -2x + ty, \\ x(1) = 1,\ y(1) = 2. \end{cases}$

$$
④\begin{cases}
\dot{x}=\frac{1}{t}x, \\
\dot{y}=-\frac{1}{t}y, \\
\dot{z}=\frac{m}{t}z, \\
x(2)=2,\ y(2)=8,\ z(2)=1.
\end{cases}
$$

$$
⑤\begin{cases}
t x=2x-t, \\
t^3\dot{y}=-x+t^2y+t, \\
t^4\dot{z}=-x-t^2y+t^3z+t, \\
x(1)=1,\ y(1)=1,\ z(1)=1.
\end{cases}
$$

3. 试作出以下列各方阵作为基本解矩阵的线性齐次方程组：

① $\begin{pmatrix} e^{2t}(\cos 6t+2\sin 6t), & e^{-13t}(\sin 6t-2\cos 6t) \\ e^{2t}(-\sin 6t+2\cos 6t), & e^{-13t}(\cos 6t+2\sin 6t) \end{pmatrix}$;

② $\begin{pmatrix} e^t\cos t, & -\sin t \\ e^t\sin t, & \cos t \end{pmatrix}$;

③ $\begin{pmatrix} e^{-t}, & 0, & e^{2t} \\ 0, & e^{-t}, & e^{2t} \\ -e^{-t}, & -e^{-t}, & e^{2t} \end{pmatrix}$.

4. 设 $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,3)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，已知方程组

$$
\begin{cases}
\frac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+a_{13}(t)x_3, \\
\frac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+a_{23}(t)x_3, \\
\frac{dx_3}{dt}=a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2+a_{33}(t)x_3+t.
\end{cases}
$$

对应的齐次方程组有基解矩阵

$$
\begin{pmatrix} 1, & e^t, & 0 \\ -1, & (1+t)e^t, & e^t \\ -1, & te^t, & e^t \end{pmatrix}.
$$

试求所给方程组的通解及满足初始条件 $x_i(0)=0$ $(i=1,2,3)$的解。

（**提示**：利用通解公式和初始条件。）

5. 如果 $\Phi(t)$ 是方程组 $\frac{dx}{dt}=A(t)x$ 的基本解矩阵，则 $\Phi^{*-1}(t)$ 是共轭方

程组$\frac{dx}{dt}=-A^*(t)x$的基本解矩阵，此处$\Phi^*(t)$，$A^*(t)$分别为矩阵$\Phi(t)$，$A(t)$的转置方阵。

6．设$x=\varphi(t)$是方程组$\frac{dx}{dt}=A(t)x$的解，$x=\psi(t)$是它的共轭方程组$\frac{dx}{dt}=-A^*(t)x$的解，试证明

$$(\varphi(t),\psi(t))=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(t)\ \overline{\psi_k(t)}=\text{常数}。$$

（**提示**：证明$\frac{d}{dt}(\varphi(t),\psi(t))=0$。）

7．证明基本解矩阵完全决定线性方程组，即如果方程组

$\frac{dx}{dt}=A(t)x$与$\frac{dx}{dt}=B(t)x$有相同的基本解矩阵，则$A(t)\equiv B(t)$，这里$A(t)$，$B(t)$均为n阶方阵。

8．设$U(t,s)$是方程组$\frac{dx}{dt}=A(t)x$的转移矩阵，试证：

① $\frac{\partial U(t,s)}{\partial s}=-U(t,s)A(s)$；

② $U(t,s)\equiv I+\int_s^t A(\tau)U(\tau,s)d\tau$；

③ $U(t,s)\equiv I+\int_s^t U(t,\tau)A(\tau)d\tau$；

这里I是单位方阵，$t,s\in(\alpha,\beta)$。

9．设方阵值函数$X(t)$在$-\infty<t<+\infty$中是连续的，并且存在t_0使$\det X(t_0)\neq0$，如果关系式

$$X(t)X(s)\equiv X(t+s),$$

对任何$t,s\in(-\infty,+\infty)$成立，且$X'(0)$存在，试证存在方阵A使得

$$X(t)\equiv e^{At}。$$

10．设$A(t)=\begin{pmatrix}2t & 1\\ 0 & 4t\end{pmatrix}$，试说明

$$x=\exp\left(\int_{t_0}^{t}A(s)\,ds\right)x_0$$

不是方程$\frac{dx}{dt}=A(t)x$的解。

11. 设 $f(t)$在 $t\geqslant 0$ 上连续,$K(t,s)$ 在 $0\leqslant s\leqslant t$ 上连续，试用逐次逼近法证明 Volterra 积分方程

$$x(t)=f(t)+\int_0^t K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

的解在 $t\geqslant 0$ 上存在且唯一。

12. 设 $p(t)$,$q(t)$ 和 $f(t)$在开区间 $\alpha<t<\beta$ 内是连续的，试证明：初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q(t)x=f(t),\ \ x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$$

的解在 $\alpha<t<\beta$ 内存在且唯一。

13. 在线性方程的存在唯一性证明中,取$[a,b]\subset(\alpha,\beta)$的手续可否省去？说明原因。

14. 设 n 阶方阵 $A(t)$在 $\alpha<t<\beta$ 内连续,并且成立着等式

$$A(t)\int_{t_0}^t A(s)\,\mathrm{d}s\equiv\int_{t_0}^t A(s)\mathrm{d}s\cdot A(t),$$

试证 $x=\exp\left(\int_{t_0}^t A(s)\mathrm{d}s\right)x_0$ 是齐次微分方程组 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x$ 的解。

第四章 线性系统模型及应用

§1 具有小振幅的质点振动——线性振动

振动是日常生活和工程技术中常见的一种运动形式，例如弹簧的振动，钟摆的往复摆动，乐器中弦线的振动，机床主轴的振动，电路中的电磁振荡，枢轴的扭振，有载荷的横梁的振动等等。在第一章中提到的摆在平衡位置附近的摆动与悬挂重物的弹簧振动及收音机的接收回路的简化模型等均属质点振动。本节讨论具有小振幅的质点振动，例如数学摆的微小振动可以取 φ 近似代替运动方程中的 $\sin\varphi$，得摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0, \tag{1}$$

或者

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t), \tag{2}$$

其中 $F(t)$ 为在摆的运动方向上作用于摆的一个外力。摆的初始状态可用下列初值条件描述：

$$\varphi(0)=\varphi_0,\quad \varphi'(0)=\omega_0, \tag{3}$$

其中 φ_0 表示摆的初始位置，ω_0 表示摆的初始角速度。又例如悬挂重物的弹簧的微振动，其位移 $|x|$ 较小，利用虎克定律知恢复力与位移成正比，因此有运动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+Cx+a\frac{dx}{dt}=0. \tag{4}$$

这些例子描述的运动所以称为线性振动是因为运动方程均是线性方程。下面以摆的微小振动为典型例子分析线性振动。

一、无阻尼自由振动

现考虑摆的无阻尼微小自由振动。它的方程是

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{5}$$

置 $\omega^2=g/l$,其中 $\omega>0$ 是常数,(5)成为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=0. \tag{6}$$

易求得方程(6)的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta), \tag{7}$$

其中 A, θ 为任意常数。由此可知不论何种初始状态 $\varphi(0)$ 与 $\varphi'(0)$,即对任意 A 与 θ,摆的运动总是一个正弦函数,它是周期为 $T=2\pi/\omega$ 的函数。这种运动称为简谐振动。易知 T 就是振动往返一次所需的时间,而 $\gamma=1/T=\omega/2\pi$ 是单位时间内振动的次数,称之为频率。$\omega=2\pi\gamma$ 称为圆频率。由此还知摆的周期只依赖于摆长 l,而与初值无关。又 A 称为摆的振幅,它是摆离开平衡位置的最大偏离。θ 称为初位相。这里,振幅和初位相都依赖于初始状态。

现考虑一个特殊的初始状态,把摆移至位置 $\varphi=\varphi_0$ 处,然后突然松开,使其自由摆动。这时初值条件(3)成为

$$\varphi(0)=\varphi_0,\quad \varphi'(0)=0. \tag{8}$$

易求得振幅 $A=\varphi_0$,初位相 $\theta=\pi/2$ 的特解为

$$\varphi=\varphi_0\sin(\omega t+\pi/2)=\varphi_0\cos\omega t.$$

二、有阻尼自由振动

由通解(7)可知,无阻尼的自由振动是按正弦规律作周期运动的,摆动似乎可以无限期地进行下去。但是实际情况是,经过一段时间后摆动就会停下来,可见方程(5)并没有完全反映摆的运动规律。实际上,必须把空气阻力这一因素考虑进去,这样,就得出有阻尼的自由振动方程:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{9}$$

记 $\zeta=\mu/2m$，$\omega^2=g/l$，这里 ζ 与 ω 均大于零，(9)可以写成

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\zeta\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=0, \tag{10}$$

对应的特征方程为

$$\lambda^2+2\zeta\lambda+\omega^2=0,$$

特征根为

$$\lambda_{1,2}=-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-\omega^2}.$$

下面对不同的阻尼值 ζ，可得不同形式的微分方程的解，从而也就得到不同的振动形式。

(i) 小阻尼情形，即 $\zeta<\omega$ 的情形。此时方程(10)的通解为

$$\varphi=e^{-\zeta t}(C_1\cos\nu t+C_2\sin\nu t), \tag{11}$$

其中 C_1 与 C_2 是任意常数，$\nu=\sqrt{\omega^2-\zeta^2}$。(11) 又可写成

$$\varphi=Ae^{-\zeta t}\sin(\nu t+\theta), \tag{12}$$

这里 A 与 θ 为任意常数。由(12) 可见 $|\varphi|\leqslant|A|e^{-\zeta t}$，即(12)的函数图形被夹在两条曲线 $\varphi=|A|e^{-\zeta t}$ 与 $\varphi=-|A|e^{-\zeta t}$ 之间（见图 4.1 中

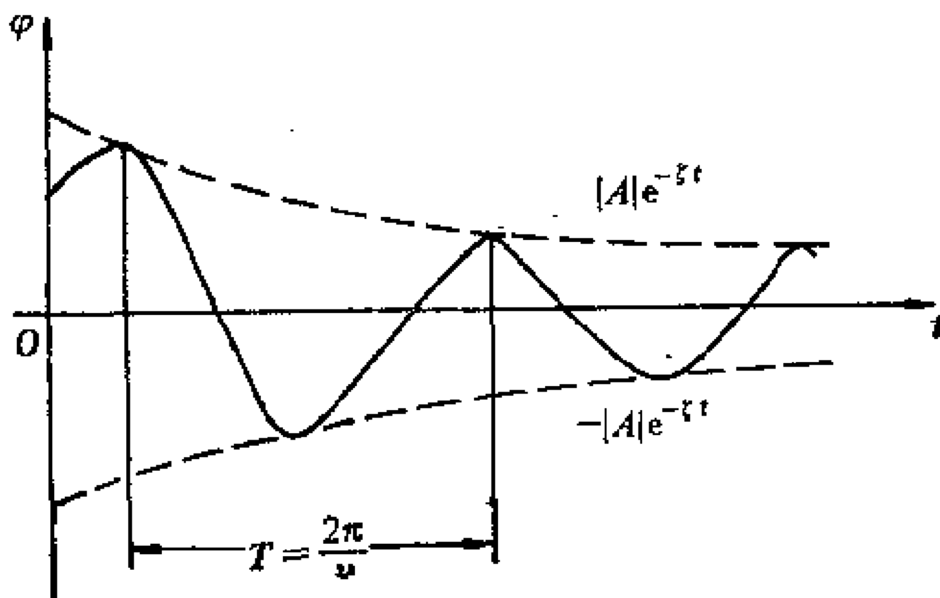


图 4.1

的两条虚线)。显见因为阻尼存在,即 $\zeta>0$,摆的最大偏离随时间增大而不断减小,摆的最大偏离趋向于零,即摆趋向于平衡位置 $\varphi=0$。注意到此时(12)的图形虽不是周期的,但摆从一个最大偏离到达同侧下一个最大偏离所需的时间 $T=2\pi/\nu$ 是恒定不变的,仅依赖于 ν。总之,形如(12)的解表示小阻尼情形摆的振动是振幅渐减并最终趋于零的在平衡位置 $\varphi=0$ 的两侧的摆动。

(ii) 大阻尼情形,即 $\zeta>\omega$ 的情形。这时特征方程有两个不同的负实根 $\lambda_2<\lambda_1<0$,方程(10)的通解为

$$\varphi=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \tag{13}$$

其中 C_1 与 C_2 是任意常数。用初值条件(3)得

$$C_1+C_2=\varphi_0,\quad C_1\lambda_1+C_2\lambda_2=\omega_0,$$

解之求得

$$C_1=(\varphi_0\lambda_2-\omega_0)/(\lambda_2-\lambda_1),$$
$$C_2=(\omega_0-\varphi_0\lambda_1)/(\lambda_2-\lambda_1).$$

易知 C_1C_2 的符号与 $(\varphi_0\lambda_2-\omega_0)(\omega_0-\varphi_0\lambda_1)$ 的符号相同。因为

$$\begin{aligned}(\varphi_0\lambda_2-\omega_0)(\omega_0-\varphi_0\lambda_1)&=-\varphi_0^2\lambda_1\lambda_2-\omega_0^2+\varphi_0\omega_0(\lambda_1+\lambda_2)\\&=-\varphi_0^2\omega^2-\omega_0^2-2\zeta\varphi_0\omega_0=-(\omega_0^2+2\zeta\omega_0\varphi_0+\omega^2\varphi_0^2),\end{aligned}$$

所以 $\omega_0/\varphi_0<\lambda_2<\lambda_1<0$ 或 $\omega_0/\varphi_0>\lambda_1>\lambda_2$ 时 $C_1C_2<0$,特别地对 $\omega_0=0$、$\varphi_0>0$ 的情形,有 $C_1C_2<0$,此时

$$0=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} \tag{14}$$

的解 t 有且仅有一个,即摆通过平衡位置 $\varphi=0$ 一次且仅一次,见图4.2(a)。又若 $\lambda_2<\omega_0/\varphi_0<\lambda_1<0$,$C_1C_2>0$,相当于 $\varphi_0>0$ 又 $\omega_0<0$ 且 $\lambda_2\varphi_0<\omega_0<\lambda_1\varphi_0$ 时,(14)的解 t 不存在,即摆不通过平衡位置 $\varphi=0$,注意 $\lambda_2<\omega_0/\varphi_0$,故 $C_1>0$,又 $\lambda_1\varphi_0>\omega_0$,故 $C_2>0$,显然

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=C_1\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}<0,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0.$$

可见此时摆单调地趋向于平衡位置 $\varphi=0$。见图4.2(c)。对 $C_1C_2<0$ 的情形,最多只有一个时刻 t_1 使 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0$,即 $C_1\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t_1}+C_2\lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t_1}=0$,

又易知当 $t\to+\infty$ 时，$\varphi(t)\to 0$，而现时 φ 可能出现的情形就是图 4.2 中的 (a)、(b)、(c) 三种。总之，振动式衰减不可能，这就是所谓的非周期过程。

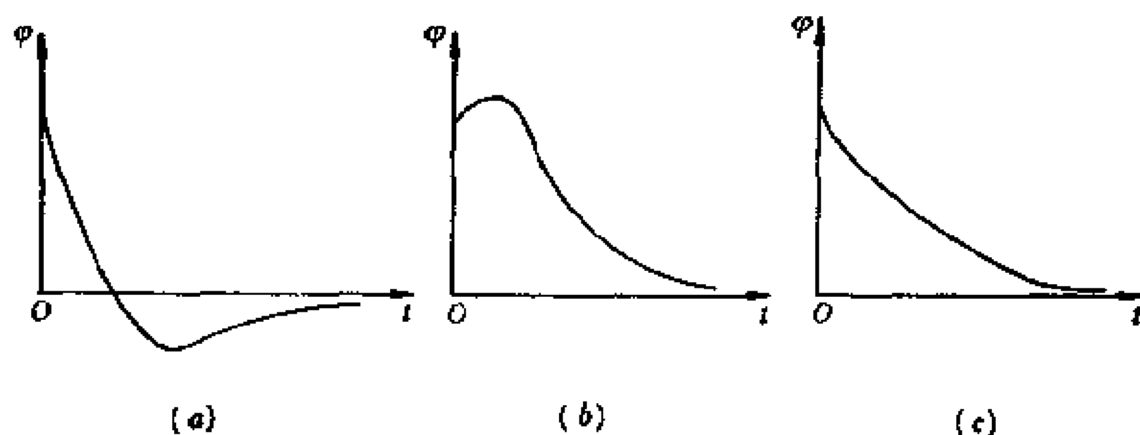


图 4.2

(iii) 临界阻尼情形：即 $\xi=\omega$ 的情形。这时有重特征根 $\lambda_1=\lambda_2=-\xi$，方程(10)的通解为

$$\varphi=e^{-\xi t}(C_1+C_2t),\tag{15}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。易知 $C_1=\varphi_0$，$C_2=\xi\varphi_0+\omega_0$。可见摆的运动不是周期的且摆也不具有振动的性质。摆可能不通过平衡位置 $\varphi=0$，也可能仅通过平衡位置 $\varphi=0$ 一次。类似于图 4.2(a)、(b)、(c)，数值 $\xi=\omega$ 称为阻尼的临界值。这一数值正好足够抑制振动。这里临界值的意思是指：摆在 $\xi\geqslant\omega$ 时不具有振动性质，运动规律如图 4.2，而当 $\xi<\omega$ 时，摆具有振动性质，运动规律如图 4.1 所示。

三、无阻尼强迫振动

摆的微小振幅强迫振动方程可写成

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t)=H\sin pt,\tag{16}$$

其中 H 为已知常数，p 为外力的圆频率。现考虑无阻尼，即 $\mu=0$ 的情形。令 $\omega^2=g/l$。这时方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\omega^2\varphi=H\sin pt. \tag{17}$$

相应线性齐次方程的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta),$$

其中 A,θ 是任意常数。

若 $\omega\neq p$，则可求得方程(17)的一个特解

$$\tilde{\varphi}=\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt,$$

从而方程(17)的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\theta)+\frac{H}{\omega^2-p^2}\sin pt. \tag{18}$$

上式右端第一部分是无阻尼自由振动的解，它代表固有振动，第二部分是振动频率与外力频率相同、而振幅不同的解，它代表由外力引起的强迫振动。从(18)式可见，如果外力的圆频率 p 越接近固有圆频率 ω，则强迫振动项的振幅就越大。

若 $\omega=p$，则方程(17)有形式如下的特解

$$\tilde{\varphi}=-\frac{H}{2\omega}t\cos\omega t,$$

从而(17)的通解为

$$\varphi=A\sin(\omega t+\varphi)-\frac{H}{2\omega}t\cos\omega t. \tag{19}$$

它表示随着时间增大，摆与平衡位置 $\varphi=0$ 的偏离将无限增加。这种现象称为共振现象。但是，实际上偏离不可能无限地增加。由此可见，到了一定的偏离以后，方程(17)就不再能很好地描述摆的运动状态了，其原因是忽略了阻尼这一因素。

四、有阻尼的强迫振动

这时摆的运动方程是

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\zeta\frac{d\varphi}{dt}+\omega^2\varphi=H\sin pt. \tag{20}$$

现仅讨论小阻尼情形，即 $\omega>\zeta$ 的情形. 可以求得方程(20)的特解

$$\tilde{\varphi}=B\cos pt+C\sin pt, \tag{21}$$

其中

$$B=\frac{-2\zeta pH}{(\omega^2-p^2)^2+4\zeta^2p^2},\quad C=\frac{(\omega^2-p^2)H}{(\omega^2-p^2)^2+4\zeta^2p^2}. \tag{22}$$

将(21)化为正弦函数形式

$$\tilde{\varphi}=H^*\sin(pt+\theta^*)$$

其中

$$H^*=\sqrt{B^2+C^2}=\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\zeta^2p^2}},$$

$$\theta^*=\operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{-2\zeta p}{\omega^2-p^2}\right].$$

这时方程(20)的通解是

$$\varphi=Ae^{-\zeta t}\sin(\nu t+\theta)+\frac{H}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\zeta^2p^2}}\sin(pt+\theta^*), \tag{23}$$

其中 A,θ 是任意常数，$\nu=\sqrt{\omega^2-\zeta^2}$.

从通解(23)中可见，摆的运动是由两部分合成的：第一部分是有阻尼的自由振动，它是系统本身的固有振动，其振幅随时间增加而减少且趋向于零；第二部分是由外力 $H\sin pt$ 引起的强迫振动项，随着时间的增加，强迫振动项的振幅并不改变而恒为常值.

在实际振动问题中人们关心的一个问题是外力的圆频率 p 取何值时引起的强迫振动项的振幅 H^* 达到最大值? 为此我们讨论函数 $(\omega^2-p^2)^2+4\zeta^2p^2$ 在 p 取何值时达最小值. 记 $G(p)=(\omega^2-p^2)^2+4\zeta^2p^2$，易得

$$G'(p)=-4p(\omega^2-p^2)+8\zeta^2p=0,$$

因此只要阻尼很小，取 $\zeta<(\sqrt{2}/2)\cdot\omega$ 时就可求得

$$p=\sqrt{\omega^2-2\zeta^2}.$$

此时 $G''(\sqrt{\omega^2-2\zeta^2})=8p^2>0$，故 $G(p)$ 在 $p=\sqrt{\omega^2-2\zeta^2}$ 时达到最小值。相应地得到强迫振动的最大振幅为

$$H_{max}^{*}=\frac{H}{\sqrt{4\zeta^4+4\zeta^2(\omega^2-2\zeta^2)}}=\frac{H}{2\zeta\sqrt{\omega^2-\zeta^2}}.$$

称 $\omega^*=\sqrt{\omega^2-2\zeta^2}$ 为共振频率。一般来说，ζ 比 ω 小得多，所以共振频率 ω^* 实际上与无阻尼强迫振动时的共振频率 ω（即自由振动的固有频率）是很接近的。虽然这时 H_{max}^{*} 为有限值，但是在工程上，共振仍会引起破坏性的效果，例如造成机器损坏、桥梁折断、建筑物倒坍等严重事故。因此，预先算出振动物体的自然频率，以便适当选取机器转速的变化范围及桥梁上承受的强迫力的频率范围，从而避免引起共振。

§2 具有阻尼器的悬臂弹簧

现考虑一个悬臂弹簧（图 4.3）。弹簧的一个端点连接在一个阻尼器上，另外一个端点可以在一根直杆上滑动。用 $x(t)$ 表示滑动端点偏离初始位置的值，用 $y(t)$ 表示与阻尼器连接的那一个端点偏离初始位置的值。我们让滑动端点按照预先规定好了的规律 $x(t)$ 运动，这里的问题就是要研究 $y(t)$ 的变化情况。在控制论中称 $x(t)$ 是系统的输入

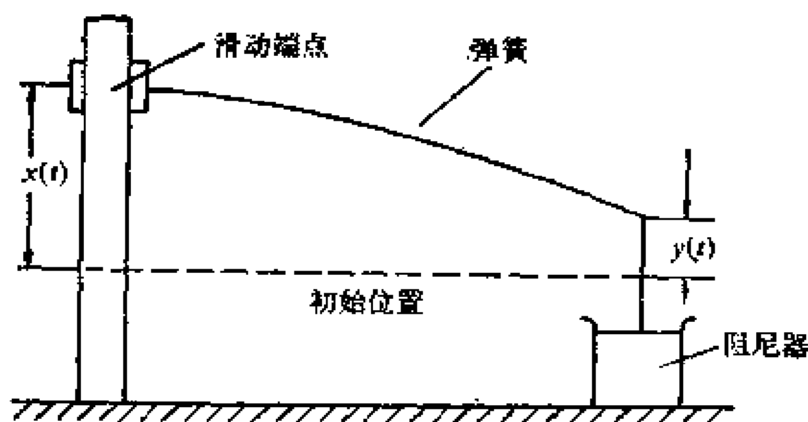


图 4.3

(控制量)，$y(t)$是系统的输出(受控量)。由于有阻尼器的缘故，$y(t)$的运动一般地落后于 $x(t)$，即 $y(t)$与 $x(t)$是不相等的。

下面来推导该系统的运动方程。设系统的弹簧常数是 k，阻尼器的阻尼系数(即阻力与速度的比值)是 c。又假定运动的加速度相当小，以至于惯性力可以忽略。由力的平衡条件就可以得到系统的运动方程：

$$c\frac{dy}{dt}+k(y-x)=0.$$

c 与 k 的比值 c/k 的量纲是时间，这个数量是系统的一个特征时间(或特性时间)，我们把这个比值

$$\tau_1=c/k \tag{1}$$

称为系统的时间常数。

运动方程可以改写为

$$\tau_1\frac{dy}{dt}+y=x(t), \tag{2}$$

这是一个一阶线性非齐次方程。现用工程控制论中常用的拉普拉斯变换法求解。给出初始条件

$$y(0)=y_0. \tag{3}$$

记 $X(s)$与 $Y(s)$分别表示 $x(t)$与 $y(t)$的拉普拉斯变换像函数。在方程(2)的两边施行拉普拉斯变换可得

$$(\tau_1 s+1)Y(s)=X(s)+\tau_1 y_0,$$

于是

$$Y(s)=\frac{X(s)}{\tau_1 s+1}+\frac{\tau_1 y_0}{\tau_1 s+1}. \tag{4}$$

(4)中输出 $Y(s)$(即现以像函数表示的输出)由两部分组成，一部分是由于输入而产生的输出，另一部分是由于初始条件产生的输出。分别用$Y_i(s)$与 $Y_0(s)$表示之：

$$Y_i(s)=\frac{1}{\tau_1 s+1}X(s). \tag{5}$$

$$Y_c(s)=\frac{\tau_1 y_0}{\tau_1 s+1}.\tag{6}$$

我们把(5)中输入 $X(s)$ 与输出 $Y_i(s)$ 之间的比例因子定义为传递函数 $F(s)$，即有

$$F(s)=\frac{1}{\tau_1 s+1}.\tag{7}$$

把(5)用一个简单的直观的方块图(图 4.4)表示，这将有助于我们想象和分析系统的情况。

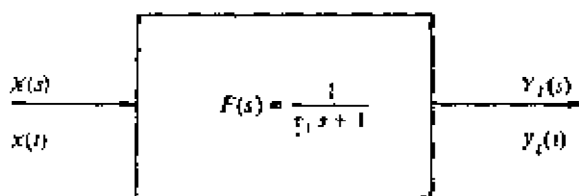


图 4.4

下面我们研究两种特殊输入情况下的输出 $y(t)$。

1. 考虑输入 $x(t)$ 是单位跳跃函数 $\eta(t)$ 的情形：

$$x(t)=\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

此时

$$X(s)=\int_0^{+\infty}\eta(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},$$

$$Y_i(s)=\frac{1}{s(\tau_1 s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+(1/\tau_1)}.$$

查表求拉普拉斯变换逆函数得

$$y_i(t)=1-e^{-t/\tau_1}.\tag{8}$$

根据(6)可求得由于初始条件而产生的输出

$$y_c(t)=y_0e^{-t/\tau_1}.\tag{9}$$

实际上直接求解方程(2)可得通解

$$y(t)=Ce^{-t/\tau_1}+1,$$

用初始条件(3)可得

$$C = y_0 - 1,$$

故有

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau_1} + (1 - e^{-t/\tau_1}) = y_c(t) + y_i(t).$$

现在我们考虑输出的特性。由初始条件而产生的输出 $y_c(t)$是一个单调递减的函数，它的时间常数就是 τ_1。另外一项由输入产生的输出 $y_i(t)$按照指数律趋于水平渐近线，时间常数也是 τ_1。事实上，当 $t = \tau_1$ 时，输出 $y_i(t)$的数值就达到了最后渐近值的 63%。

我们把输入 $x(t)$与输出 $y_i(t)$的差数 $e(t) = x(t) - y_i(t)$称为**偏差信号**。在所考虑的情形里 $e(t) = e^{-t/\tau_1}$。所以，当 $t \to +\infty$ 时，偏差信号趋于零。

2. 假定输入是正弦式的，即

$$x(t) = x_m e^{i\omega t},$$

其中 x_m 是振幅，ω 是频率。这时

$$X(s) = \frac{x_m}{s - i\omega}. \tag{10}$$

由初始条件而产生的输出 $y_c(t)$和前一种情形一样，即为(9)。由于输入而产生的输出就是

$$Y_i(s) = \frac{x_m}{(s - i\omega)(\tau_1 s + 1)}$$

$$= \frac{x_m}{1 + i\omega\tau_1}\left(-\frac{1}{s + (1/\tau_1)} + \frac{1}{s - i\omega}\right),$$

查表求得输出 $y_i(t)$就是

$$y_i(t) = -\frac{x_m}{1 + i\omega\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{x_m}{1 + i\omega\tau_1} e^{i\omega t}.$$

上式中的第一项是一个单调递减函数，第二项表示稳态输出 $[y(t)]_{st}$。易见传递函数在 $i\omega$ 的值 $F(i\omega)$为$[y(t)]_{st}$ 与 $x(t)$之比。这也可从频率特性方法的观点来看，此时方程(2)对应的齐次方程的特征方程为

$$H(\lambda) = \tau_1 \lambda + 1 = 0.$$

稳态解即稳态输出 $[y(t)]_{st}$ 就是 (2) 的右端自由项即输入 $x(t)$ 与 $1/H(i\omega)$即 $F(i\omega)$的乘积。由于

$$\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega\tau_1}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathrm{tg}^{-1}(\omega\tau_1)}.$$

所以稳态输出可以表示为

$$[y(t)]_{st}=\frac{x_m}{\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\mathrm{tg}^{-1}(\omega\tau_1))} \tag{11}$$

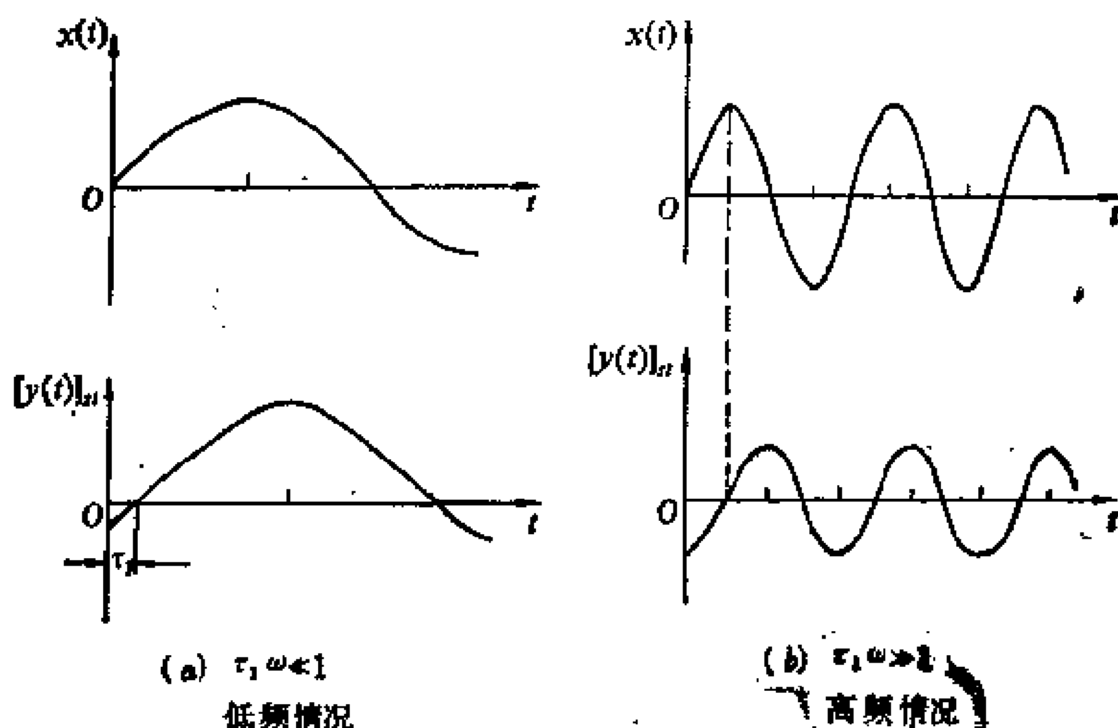
因此，稳态输出的振幅减少到输入的振幅的 $1/\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}$ 倍，而且输出的相角比输入的相角落后的数值是 $\mathrm{tg}^{-1}\omega\tau_1$。对于低频的情况，即输入的频率 ω 相当低，$\omega\tau_1\ll 1$，因而 $\mathrm{tg}^{-1}\omega\tau_1\cong\omega\tau_1$。故这时

$$[y(t)]_{st}\cong x_m\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-\tau_1)},\quad \tau_1\omega\ll 1. \tag{12}$$

易知，此时振幅没有改变。但是有一个时滞（时间上的落后），这个时滞也就等于传递函数的时间常数 τ_1。又对于高频的情况，即输入的频率 ω 相当高，$\tau_1\omega\gg 1$ 时 $\mathrm{tg}^{-1}\omega\tau_1\cong\pi/2$，$1/\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}\cong 1/\omega\tau_1$。故有

$$[y(t)]_{st}\cong\frac{x_m}{\omega\tau_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t-(\pi/2)]},\quad \tau_1\omega\gg 1. \tag{13}$$

在这种情形中，振幅减少到 $1/\omega\tau_1$ 倍，而相角落后的数值是 $\pi/2$。这两种极端情形的输出情况可用图 4.5 表示。



(a) $\tau_1\omega\ll 1$ 低频情况　　(b) $\tau_1\omega\gg 1$ 高频情况

图 4.5

上述系统是悬臂弹簧简化的一阶模型，现来考虑二阶模型。我们在阻尼器这一端加上一个质量 m。这个质量引起一个惯性力 $m\,\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2$。因而运动方程就成为

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=kx(t). \tag{14}$$

假定初始条件是

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_0^{(1)}, \tag{15}$$

其中 $y_0, y_0^{(1)}$ 是给定的常数。

引进下列两个参数

$$\omega_0^2=k/m,\quad \zeta=c/2m\omega_0, \tag{16}$$

其中 ω_0 就是当阻尼器不存在时的质量弹簧系统的自然频率，ζ 是实际的阻尼和临界阻尼的比值，此时(14)可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta\omega_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2y=\omega_0^2x(t). \tag{17}$$

在本章 §1 中我们已经研究过类似于(17)的线性弹簧具小振幅的强迫振动。当然也可用如一阶情形一样的拉普拉斯变换与传递函数方法来讨论方程(17)，有兴趣的读者不妨试一试。

§3 R-L-C 电路——线性电路

在第一章里我们已经遇到了简单的 R-L 与 R-L-C 串联电路，由电路的基尔霍夫定律可将其归结为二阶线性常系数方程。同时我们也遇到了多个回路的问题，此时则有线性常系数微分方程组。我们称 R-L-C 电路为线性电路。下面分别通过几个电路的实例说明线性电路的特性以及用微分方程模型分析线性电路的方法。

一、相角落后电路和相角超前电路

图 4.6 所示的电路是包含电阻 R 和电容 C 的电路。v_1 和 v_2 分别表示输入电压和输出电压。假设 $i=i(t)$ 是流入电阻 R 和电容 C 的电流，又设在 $t=0$ 时，电容 C 上没有电荷。于是可由基尔霍夫第二定

律得

$$iR+\frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi=v_1, \tag{1}$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi=v_2. \tag{2}$$

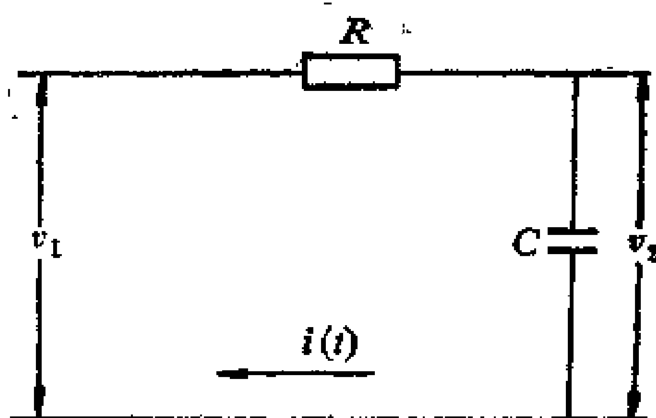


图 4.6

对(1)与(2)两个方程作拉普拉斯变换可得

$$\left(R+\frac{1}{Cs}\right)I(s)=V_1(s),$$

$$\frac{1}{Cs}I(s)=V_2(s).$$

因此

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=F(s)=\frac{1}{1+RCs}. \tag{3}$$

从(3)可见，这个电阻电容电路的传递函数和有阻尼器的悬臂弹簧的传递函数(§2中的(7))是相同的，这个电路系统的时间常数就是 $\tau_1=RC$。实际上记 $Cv_1=x(t)$，$\int_0^t i(\xi)\mathrm{d}\xi=Cv_2=y$，即可得出与§2中的(2)相同的微分方程，此时有 $\tau_1=RC$。

虽然这一个电路系统的动态特性和§2中的悬臂弹簧系统的动态特性是相同的，但是在实际工程中改变和调整悬臂弹簧系统的参数 C 和 k 往往是比较困难的，而且 C 和 k 的可能的变动范围也很有限，而

对这个电路系统改变和调整 R 和 C 的数值就比较容易，而且 R 和 C 的变化范围也很大。从这个实例可见用电的方法进行调节或控制往往比用机械方法方便得多。

由输入 $v_1(t)$ 生成的输出 $v_2(t)$ 可用频率特性 $F(\mathrm{i}\omega)$ 表示，即有 $v_2(t)=F(\mathrm{i}\omega)v_1(t)$。注意频率特性与传递函数的关系

$$F(\mathrm{i}\omega)=M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

$$M=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}},\quad \theta=-\mathrm{tg}^{-1}(\omega CR),$$

由此得输出电压与输入电压除了大小有一个因子外，相角也落后了 θ。故这电路常常用来产生系统的相角落后。

图 4.7 表示一个并联电路，比图 4.6 的电路复杂一些。这个电路的方程是

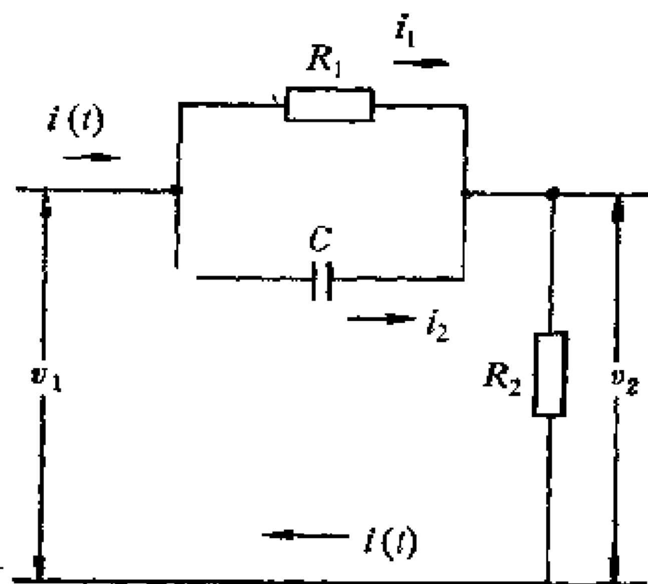


图 4.7

$$i=i_1+i_2,$$

$$R_1i_1=\frac{1}{C}\int_0^t i_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$$v_1=R_1i_1+R_2i,$$

$$v_2=R_2i.$$

相应的拉普拉斯变换后的方程就是

$$I = I_1 + I_2,$$

$$R_1 I_1 = \frac{1}{Cs} I_2,$$

$$V_1 = R_1 I_1 + R_2 I,$$

$$V_2 = R_2 I.$$

因此

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = F(s) = \frac{R_2 + R_1 R_2 Cs}{(R_1 + R_2) + R_1 R_2 Cs}. \tag{4}$$

放大系数就是

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = r < 1$$

引进记号

$$\omega_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}.$$

则传递函数可以改写为

$$F(s) = r \cdot \frac{1 + (s/r\omega_1)}{1 + (s/\omega_1)}.$$

频率特性就是

$$F(\mathrm{i}\omega) = \frac{r\omega_1 + \mathrm{i}\omega}{\omega_1 + \mathrm{i}\omega} = M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{5}$$

引进无量纲频率 $u = \omega/\sqrt{r}\,\omega_1$，就有

$$M = \sqrt{r}\sqrt{\frac{1 + (u^2/r)}{(1/r) + u^2}}, \tag{6}$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{u}{\sqrt{r}} - \mathrm{tg}^{-1}(\sqrt{r}\,u) > 0, \tag{7}$$

显见对于非常大的 ω 值，$M = 1$；对于非常小的 ω 值，$M = r < 1$. 又可见这个电路使输出的相角超前输入。

读者可以分析图 4.8 所示的阻容电路，得知传递函数正好是前面

电路的传递函数(除了一个常数因子之外)的倒数。这个电路使输出相角落后。

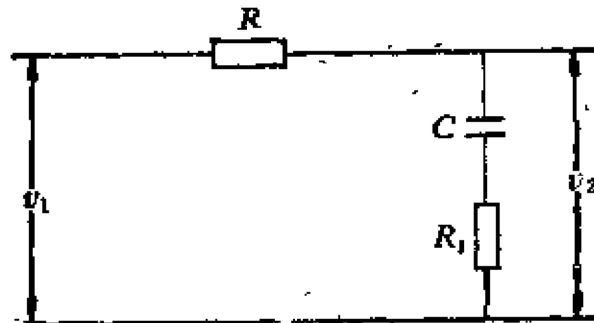


图 4.8

从上述可见,图 4.7 所示电路的方程若写成正规的方程,即关于输入 $x(t)=Cv_1$,输出 $y(t)=Cv_2$ 的方程,则也可以通过求解 $y(t)$ 的一阶方程 (此时 $x(t)$ 可以用 $\tilde{x}\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ 形式),得到 $y(t)$ 的形式,同样可以求得 $y(t)/x(t)=F(i\omega)$. 但是比较起来,用我们上面所述的拉普拉斯变换法比较简单。

二、收音机接收回路的简化

我们在第一章里已经讨论了收音机的接收回路经过简化的数学模型,建立了电容 C、电感 L 和一个外来的各个电台发射的无线电波的电磁场所产生的感应电动势 $\varepsilon(t)$ 串联的回路,得出相应的方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}x=\frac{1}{LC}\varepsilon(t). \tag{8}$$

注意到各个电台是以一定的频率进行发射的,因此 $\varepsilon(t)$ 将是各种频率波的叠加,即

$$\varepsilon(t)=\sum_{k=1}^{N}(a_k\cos\omega_k t+b_k\sin\omega_k t),$$

其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N$ 是互不相同的,N 是电台个数. 由于线性方程的叠加原理,可只考虑右端分别为

$$\frac{1}{LC}\cos\omega_k t,\qquad \frac{1}{LC}\sin\omega_k t$$

的方程，当然也可以只考虑 $\varepsilon_k \sin(\omega_k t+\theta_k)$ 作为右端的方程。

现先回顾一下 n 阶常系数线性非齐次方程组的一种求解方法——频率特性法（可以视为算子解法的一种特例）。对

$$a_n\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_0x=\varepsilon_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{9}$$

求解，只求它的特解，即由输入 $\varepsilon_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 引起的输出 $\tilde{x}(t)$，用待定系数法或算子解法易得（$\mathrm{i}\omega$ 不是特征根时）

$$\tilde{x}(t)=\frac{\varepsilon_0}{a_n(i\omega)^n+a_{n-1}(i\omega)^{n-1}+\cdots+a_1i\omega+a_0}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{10}$$

注意此时输出 $\tilde{x}(t)$ 的频率仍为 ω，但振幅与相角均改变了，且由下式表示的频率特性

$$\frac{1}{a_n(i\omega)^n+a_{n-1}(i\omega)^{n-1}+\cdots+a_1i\omega+a_0} \tag{11}$$

作为输出与输入之间的比例因子。

关于方程(8)，记 $\omega_0^2=1/LC$，$\varepsilon(t)=\omega_0^2\varepsilon_0\sin\omega t$，即有方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=\omega_0^2\varepsilon_0\sin\omega t. \tag{12}$$

先讨论(12)之右端为 $\varepsilon_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 的方程。当 $\omega_0\neq\omega$ 时，这方程有解

$$x=\frac{\omega_0^2}{(\mathrm{i}\omega)^2+\omega_0^2}\varepsilon_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\varepsilon_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

它的虚部

$$\tilde{x}=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\varepsilon_0\sin\omega t \tag{13}$$

就是方程(12)的一个特解。

如果 ω 是某电台的发射频率，ω_0 是在调整 L 和 C 在某一刻度处收音机接收回路的固有频率，$\omega_0^2=1/LC$，当 ω_0 与 ω 相差很小时，解 $\tilde{x}(t)$ 即输出的振幅 $\varepsilon_0\omega_0^2/(\omega_0^2-\omega^2)$ 就很大，相反当 $|\omega_0^2-\omega^2|$ 很大时，振幅 $\varepsilon_0\omega_0^2/(\omega_0^2-\omega^2)$ 就很小。这样，虽然有各种电台的波长的电磁波在空中传播，但只要调整 ω_0 使它非常接近于所希望收听的电台的 ω，则其他电台的影响就可以略去不计，而收到所需收听的电台节目。

当 $\omega_0=\omega$ 时，方程(12)没有正弦或余弦形状的解，它的特解是

$$\tilde{x}=-\frac{\omega\varepsilon_0}{2}t\cos\omega t, \tag{14}$$

其振幅将随 t 增加而无限增大，这种现象就是前面已提到过的共振现象。当然，上面的分析说明只要使接收回路固有频率 ω_0 接近或达到 ω，输出的振幅就可以很大，从而达到收听频率为 ω 的电台节目的目的。

三、R-L-C 多回路分析

图 4.9 是 R-L-C 的多个回路组成的一个电路，为了建立它的数学模型，我们先把电路分解成两个回路，见图 4.10。然后利用基尔霍夫

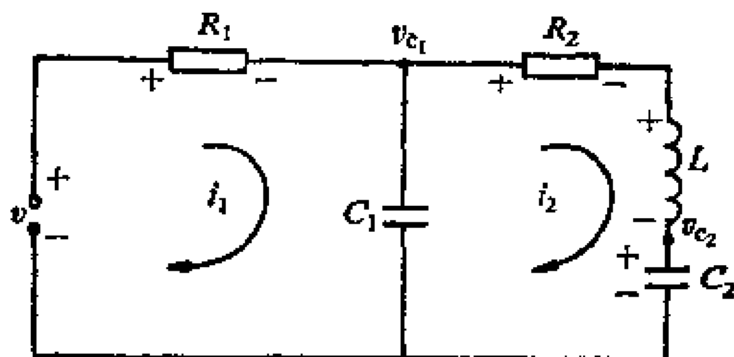


图 4.9

第二定律，对上回路可建立方程

$$v=i_1R_1+\frac{1}{C_1}\int_0^t(i_1-i_2)\mathrm{d}t+v_{c_1}(0); \tag{15}$$

对下回路可建立方程

$$\begin{aligned}0=i_2R_2+L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C_2}\int_0^t i_2\,\mathrm{d}t+v_{c_2}(0)\\+\frac{1}{C_1}\int_0^t(i_2-i_1)\mathrm{d}t-v_{c_1}(0),\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $v_{c_1}(0)$ 与 $v_{c_2}(0)$ 分别表示电容 C_1 与 C_2 上的初始电位。

方程组(15)与(16)还不是标准的微分方程组。下设 $x_1=v_{c_1}$（电

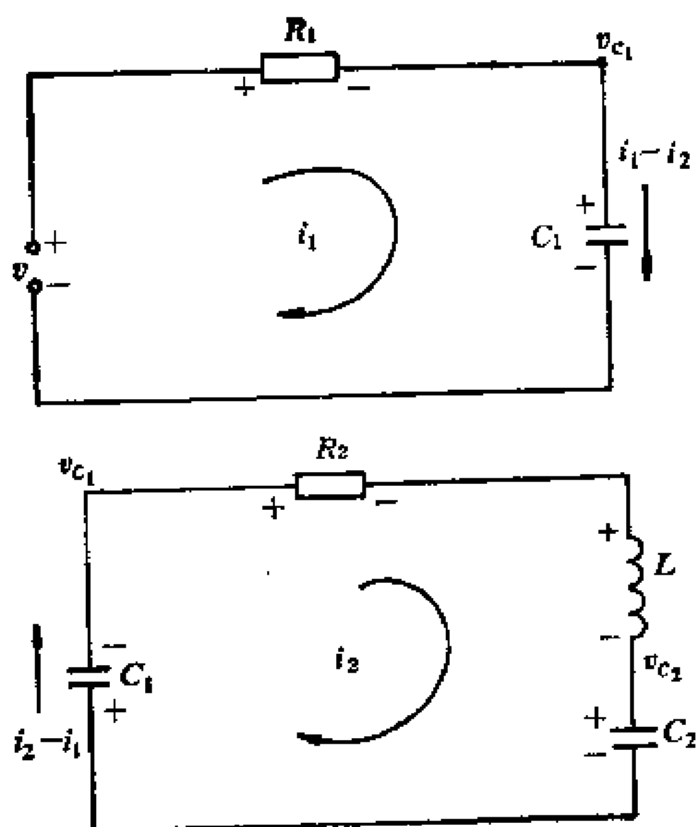


图 4.10

容 C_1 上的电位)，$x_2=v_{c_2}$ (电容 C_2 上的电位)，$x_3=i_2$ (通过电感 L 的电流)。易得方程组

$$\begin{cases} x_1'=\dfrac{-1}{R_1C_1}x_1-\dfrac{1}{C_1}x_3+\dfrac{v}{R_1C_1}, \\ x_2'=\dfrac{1}{C_2}x_3, \\ x_3'=\dfrac{1}{L}x_1-\dfrac{1}{L}x_2-\dfrac{R_2}{L}x_3, \end{cases} \tag{17}$$

初值条件为

$$x_1(0)=v_{c_1}(0), \ x_2(0)=v_{c_2}(0), \ x_3(0)=i_2(0). \tag{18}$$

(17)是一阶线性常系数非齐次常微分方程组，用前面第二章的解法易求得它的解。

在推导方程组(17)时用到下述关系式

$$x_2=v_{c_2}=\frac{1}{C_2}\int_0^t i_2\,\mathrm{d}t+v_{c_2}(0),$$

$$x_1 = v_{c_1} = \frac{1}{C_1}\int_0^t (i_1 - i_2)\,dt + v_{c_1}(0) = v - i_1R_1,$$

$$x_1' = (i_1 - i_2)/C_1 = (i_1 - x_3)/C_1.$$

§4 用于轻度糖尿病诊断的数学模型

糖尿病是一种常见的疾病，其特征是血液和尿中糖的成分过多。诊断糖尿病的一种方法是通过葡萄糖耐量试验(Glucose Tolerance Test 简称 GTT)。这种试验要求病人在前一天晚上禁食，次日口服大量葡萄糖，在以后的 3 至 5 小时内几次测定病人的血液中葡萄糖的浓度，最后根据测量结果进行诊断。这种诊断方法的关键在于建立公认的诊断准则。但是这件事是十分困难的。目前由对 GTT 的三种不同的物理解释而得出三种不同的诊断的样式。

在 60 年代中期，有人发现了用来解释 GTT 试验结果的相当可靠的准则，这个准则来源于根据生物学原理建立起来的血糖系统的非常简单的数学模型，根据其中一、两个参数就能得到区分正常人同轻度糖尿病患者和潜性糖尿病患者的准则。在这个模型中，着重考虑两个浓度作为时间 t 的未知函数：血糖浓度 G 和纯激素浓度 H。像胰岛素这样一些降低血糖浓度的激素，被认为使 H 增加，而像皮质醇这样一些增加血糖浓度的激素，则认为使 H 减少。

下面的方程组是血糖调节系统的基本的数学模型：

$$\begin{cases} \dfrac{dG}{dt} = F_1(G,H) + J(t) \\ \dfrac{dH}{dt} = F_2(G,H) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $F_1(G,H)$ 与 $F_2(G,H)$ 是关于变元 G,H 连续的且具有一阶连续偏导数的函数，函数 $J(t)$ 是血糖浓度增加的外界速率。方程组 (1) 说明 G 与 H 随时间的变化率依赖于 G 与 H 的值。现作进一步假设：暂时断食的病人来到医院时，G 和 H 达到最佳值(即由 G 和 H 值引起的 G 和 H 的变化率为零)，这意味着 $F_1(G_0,H_0)=0$，和 $F_2(G_0,H_0)$

$=0$。因为我们关心的是 G 和 H 对于它们的最佳值的偏离程度，故可以用这两个偏离程度的度量值作为方程组中的未知函数。令

$$g=G-G_0,\quad h=H-H_0,$$

则方程组(1)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=F_1(G_0+g,H_0+h)+J(t),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=F_2(G_0+g,H_0+h).\end{cases}$$

由泰勒展开得

$$F_1(G_0+g,H_0+h)=F_1(G_0,H_0)+\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H}h+e_1,$$

$$F_2(G_0+g,H_0+h)=F_2(G_0,H_0)+\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}h+e_2,$$

其中 e_1 与 e_2 均是关于 g 与 h 的高阶无穷小量。若 g 与 h 很小，则可忽略 e_1 与 e_2，而得到下面的线性常系数方程组：

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H}h+J(t),\tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}h.\tag{3}$$

在方程组(2)、(3)中，线性部分的四个系数虽不确定，但我们能够确定它们的符号。参看图 4.11，当 $g>0,h=0$ 时，由于组织吸收葡萄糖，而多余的葡萄糖又以糖原的形式贮藏在肝脏里，所以血糖浓度将会降低，即 $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ 为负值，因此 $\dfrac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G}$ 必定是负的。同样地，当 $g=0,h>0$ 时，由于正的 h 值通过促进组织吸收葡萄糖和增加葡萄糖转化为糖原的速率，这将会使血糖浓度降低，即 $\dfrac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H}$ 必定是负的。又因为当 $g>0,h=0$ 时，那些内分泌腺分泌的激素是使 H 的值增加的，即

$\frac{dh}{dt}$为正的，所以$\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G}$必定是正的。最后，当 $g=0,h>0$ 时，正的 h 值使激素代谢，故$\frac{dh}{dt}$是负的，所以$\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}$必定是负的。由上面的符号分析，可以把(2)、(3)改写为

$$
\begin{cases}
\frac{dg}{dt} = -m_1 g - m_2 h + J(t), & (4)\\
\frac{dh}{dt} = -m_3 h + m_4 g, & (5)
\end{cases}
$$

其中 m_1, m_2, m_3 和 m_4 都是未知的正常数。

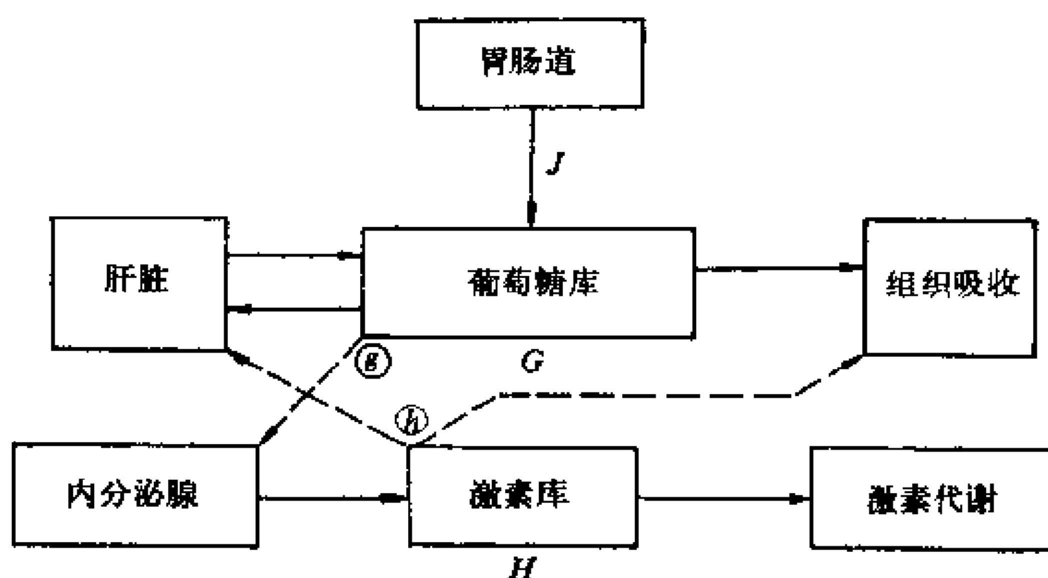


图 4.11

由于我们只是测量血液中葡萄糖的浓度，所以希望推得一个仅有 g 的方程来求解，也就是要消去 h。为此，对(4)两边求导得

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -m_1\frac{dg}{dt} - m_2\frac{dh}{dt} + \frac{dJ}{dt}.$$

再把(5)的$\frac{dh}{dt}$代入上式得

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -m_1\frac{dg}{dt} + m_2m_3h - m_2m_4g + \frac{dJ}{dt}. \tag{6}$$

再由(4)得

$$m_2 h = -\frac{dg}{dt} - m_1 g + J(t),$$

因此,$g(t)$满足二阶线性常系数非齐次方程

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + (m_1 + m_3)\frac{dg}{dt} + (m_1 m_3 + m_2 m_4) g = m_3 J(t) + J'(t). \tag{7}$$

将(7)简记为

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + 2\zeta\frac{dg}{dt} + \omega_0^2 g = S(t), \tag{8}$$

其中 $\zeta = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$, $\omega_0^2 = m_1 m_3 + m_2 m_4$, $S(t) = m_3 J(t) + J'(t)$.

只要不是在很短的时间里吞食了大量的葡萄糖(即血糖浓度增加的外界速率为零),总有 $S(t)\equiv 0$. 即对 $t\geqslant 0$ 有

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + 2\zeta\frac{dg}{dt} + \omega_0^2 g = 0. \tag{9}$$

这个方程的系数都是正的,故特征方程的特征根均有负实部,当 t 趋于无穷大时,$g(t)$趋向于零。由此可知,我们建立的数学模型的确符合于所预料的实际情况,即血糖浓度 G 最终将回到它的最佳值 G_0.

一共有五个未知数要确定,即(9)的通解中的两个任意常数以及 ζ,ω_0,G_0. 下面以 $\zeta^2-\omega_0^2<0$ 为例说明确定的方法.此时,

$$g(t) = Ae^{-\zeta t}\sin(\omega t+\delta), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \zeta^2,$$

$$G(t) = G_0 + Ae^{-\zeta t}\sin(\omega t+\delta). \tag{10}$$

G_0 可由病人在口服大量葡萄糖以前的血糖浓度来测定。然后我们在四个时间 t_1, t_2, t_3 和 t_4 测量病人的血糖浓度,得到四个相应的 G 值 G_1,G_2,G_3 和 G_4,即得四个方程

$$G_i = G_0 + Ae^{-\zeta t_i}\sin(\omega t_i+\delta) \quad (i=1,2,3,4), \tag{11}$$

由此可以确定四个未知数 A,ζ,ω_0,δ.

当然还有确定 A,ζ,ω_0,δ 的更好的方法,例如取 n 个时刻 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 测量病人的血糖浓度 G 的值: $G_1,G_2,\cdots,G_n$. 即得 n 个"方程",

一般可取 $n=6$ 或 7，考虑误差

$$E=\sum_{i=1}^{n}[G_i-G_0-Ae^{-\xi t_i}\sin(\omega t_i+\delta)]^2, \tag{12}$$

选取 A,ξ,ω,δ 使 E 达最小(这可以在电子计算机上实现)。

最后回到原先的问题，即诊断轻度糖尿病的准则问题。实践表明，测量 G 时的微小误差可能使 ξ 值产生很大的误差。因此，任何包含参数 ξ 的诊断糖尿病的准则都是不可靠的。然而，参数 ω_0(称之为系统的自然频率)，比较而言，对于测量 G 时的实验误差不大敏感。可以把 ω_0 的值看成解释葡萄糖耐量试验的准则的基本判别值。在进行讨论时，使用对应 ω_0 的自然周期，即 $T_0=2\pi/\omega$ 更方便。取自不同来源的数据表明，T_0 值小于 4 小时，是正常的，如 T_0 明显地大于 4 小时，则意味着患有轻微的糖尿病。

习　题

1. 实验证明：气体在压缩过程中，压强随体积的减小而增大，且压强对体积的变化率与压强成正比，与体积成反比。设气缸中活塞的面积为 A(常数)，活塞距气缸左端的距离为 x，求气体的压强 p 随体积 Ax 的变化规律。

2. 求曲线族的方程，使其切线介于坐标轴间的部分被切点等分。

3. 两种液体在一个容器里煮沸，经过实验得知：在任何时刻它们汽化量的比和仍在液态的量的比成正比(比例系数为 k)，若在实验开始时，两种液体的量分别为 m 和 n，求两种液体的液态量 x 和 y 之间的关系。

4. 长为 6 米的链条无摩擦地从桌面上滑下。运动开始时，链条自桌上垂下的部分为一米长。求链条全部滑过桌子所需的时间。

5. 两个相同的重物挂在弹簧的一端，使弹簧伸长了 $2a$，当其中一个重物突然坠落后，求另一重物的运动规律。

6. (图 4.12)是一种时间继电器的控制电路，先将开关 K 闭合，这时对电容 C 充电到电压 E，同时继电器 L 中有稳定电流 $i_0=E/R_2$，已知 $R_1=1$ 欧姆，$R_2=5$ 欧姆，$L=2$ 亨利，$C=100$ 微法拉，$E=120$ 伏特，求

① 开关打开后，电感中的电流 $i(t)$；

② 当 $i(t)$ 降到 0.01 安培时，继电器接触点断开，问打开开关后经过多少时间才能使触点断开。

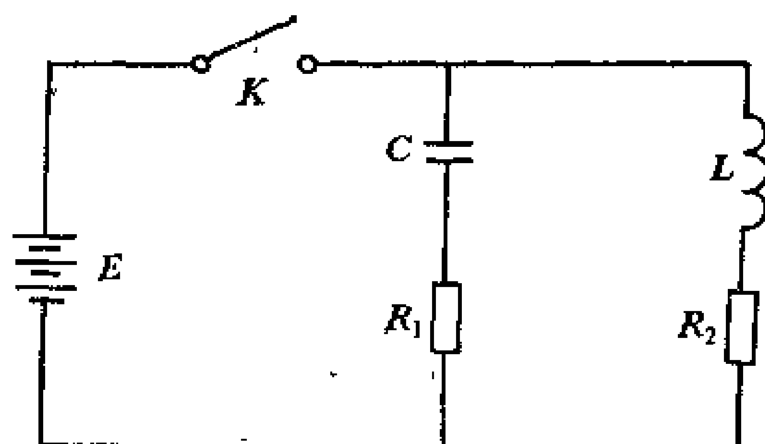


图 4.12

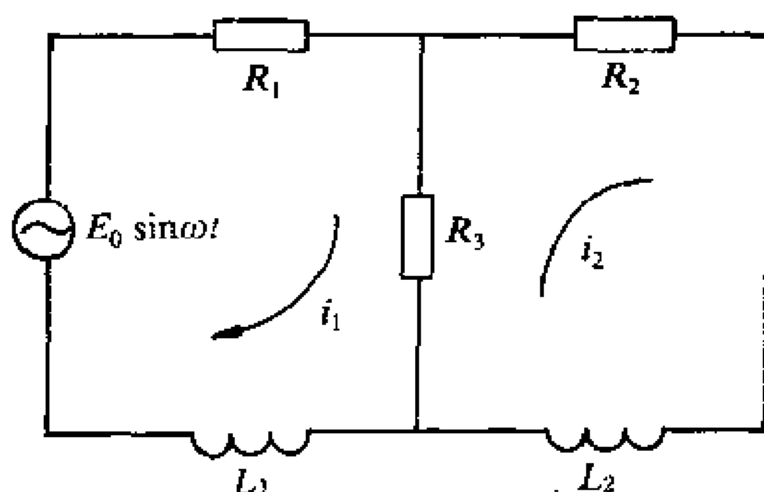


图 4.13

7. 在图 4.13 所示的电路中，已知 $E=E_0\sin\omega t$，$i_1(0)=i_2(0)=0$，试就 $L_1=L_2=L, R_1=R_2=R_3=R$ 的情形，求出 $i_1(t)$ 和 $i_2(t)$。

8. 质量为 m_1 和 m_2 的两个小球，穿在一光滑水平杆上由一轻弹簧连接，且可沿杆移动。当弹簧不受力时，两小球重心间的距离为 l。若用 x_1, x_2 分别表示两球的位移，当 $t=0$ 时，$x_1=0$，$\dot{x}_1=v_0$，$x_2=l$，$\dot{x}_2=0$。试求两球的运动规律。

第五章　非线性微分方程

§1　导数已解出的一阶非线性方程

现在讨论导数已解出的一阶非线性方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{1}$$

的求解．我们要指出，有些这种类型的方程是不能直接求解的．譬如1841年，法国数学家刘维尔证明，对于十分简单的黎卡提（Riccati）方程

$$\frac{dx}{dt}=x^2+t^\alpha,$$

除α是某些特殊值外，是不能用初等函数或它们的有限次积分表示的，即不能用初等积分法求解．

(1) 的解法的基本思想就是通过变量（自变量或未知函数）代换，将(1)化为线性方程或易求积的方程．

一、可以化为线性方程的非线性方程

（Ⅰ）贝努利方程

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)x^\alpha(\alpha\neq 0,1), \tag{2}$$

其中$P(t)$，$Q(t)$是$a<t<b$内的连续函数．

显见，$x\equiv 0$是(2)的特解．下面设$x\neq 0$，用x^α除(2)的两边得

$$x^{-\alpha}\frac{dx}{dt}+P(t)x^{-\alpha+1}=Q(t),$$

作未知函数变换 $y=x^{-\alpha+1}$。注意

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(1-\alpha)x^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(1-\alpha)P(t)y=(1-\alpha)Q(t).$$

这是关于 y 的线性方程。因此，可以求出它的全部解，然后再代回原变量 x，就得到原方程的全部解。

例 1 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+\frac{t^2}{x}. \tag{3}$$

解 这是(2)中 $\alpha=-1$ 时的贝努利方程。在方程(3)两边乘 x 得

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x^2=t^2,$$

作未知函数代换 $y=x^2$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=2t^2. \tag{4}$$

这是关于 y 的线性常系数非齐次方程，易求得(4)的相应的齐次方程的通解

$$y^*=C\mathrm{e}^{2t},$$

这里 C 为任意常数。为求(4)的特解，令

$$\tilde{y}=at^2+bt+c,$$

代入(4)得

$$2at+b-2(at^2+bt+c)=2t^2,$$

比较 t 的同次幂系数得

$$a=-1,\ b=-1,\ c=-\frac{1}{2}.$$

这样，得(4)的通解为

$$y=y^*+\tilde{y}=C\mathrm{e}^{2t}-t^2-t-\frac{1}{2}.$$

代回原来的未知函数 x，得 (3) 的通积分为

$$x^2 = Ce^{2t} - t^2 - t - \frac{1}{2}.$$

（Ⅱ）交换自变量与未知函数的位置，得到新的微分方程为线性的。

例 2 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{6x - y^2}. \tag{5}$$

解 注意方程(5)右端仅在分母中出现 x 的项，且为 x 的一次项，这时可以将 x 视为未知函数，y 视为自变量，将(5)改写为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{6x - y^2}{2y} = \frac{3}{y}x - \frac{y}{2}.$$

显见它关于 x 是线性方程，易求得通解为

$$x = e^{\int \frac{3}{y}dy}\left(C + \int e^{-\int \frac{3}{y}dy}\left(-\frac{y}{2}\right)dy\right)$$

$$= y^3\left(C + \frac{1}{2y}\right) = Cy^3 + \frac{y^2}{2},$$

其中 C 为任意常数。

（Ⅲ）对已知一个特解 $x = x_1(t)$ 的黎卡提方程

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + Q(t)x^2 + R(t), \tag{6}$$

只要作未知函数变换，$y = x - x_1(t)$，就有

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} = P(t)x + Q(t)x^2$$

$$- [P(t)x_1(t) + Q(t)x_1^2(t)]$$

$$= P(t)y + Q(t)y^2 + 2Q(t)x_1(t)y.$$

这是以 y 为未知函数的贝努利方程.

例 3 求解方程

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - \frac{2}{t^2}. \tag{7}$$

解 先找特解。设 $x=k/t$ (k 是待定常数)，将它代入方程(7)得

$$-\frac{k}{t^2}=\frac{k^2}{t^2}-\frac{2}{t^2},$$

即 $k^2+k-2=0$，解得 $k_1=1$，$k_2=-2$，故得两个特解：$x_1=1/t$ 或 $x_2=-2/t$。现在取 $x_1=1/t$。作变换 $y=x-1/t$，得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{1}{t^2}=\left(y+\frac{1}{t}\right)^2-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^2}=y^2+\frac{2}{t}y,$$

在上式两边除以 y^2 得

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}=1+\frac{2}{t}\cdot\frac{1}{y}.$$

令 $u=1/y$，得

$$\frac{du}{dt}+\frac{2}{t}u=-1,$$

解得

$$u=\frac{C}{t^2}-\frac{1}{3}t,$$

代回原来变量得 $y=1/u=3t^2/(3C-t^3)$，所以方程(7)的解为

$$x=\frac{3t^2}{3C-t^3}+\frac{1}{t}.$$

二、能用求积法求解的方程

(I) 能用分离变量法求解的方程。

形状如

$$\frac{dx}{dt}=f(x)g(t) \tag{8}$$

的方程称为变量可分离的方程。

它的特点为右端是未知函数 x 的函数与自变量 t 的函数的乘积，其中 $f(x)$ 是已知的连续函数，$g(t)$ 是 $a<t<b$ 上的已知连续函数。

先求特解。若 $f(x)=0$ 有某些实根 $x=\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$，则方程(8)有 m 个特解 $x(t)\equiv\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$。

下设 $f(x)\neq 0$。在 (8) 的两边除以 $f(x)$，使与 x 有关的项及与 t 有关的项分开来，得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=g(t)\,\mathrm{d}t,$$

两边积分得(8)的通积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int g(t)\mathrm{d}t+C,\tag{9}$$

其中 C 为任意常数。将这通积分与前面的特解合起来，组成(8)的全部解。注意在求(8)的全部解时，不要把特解遗漏。

下面证明(9)是方程(8)的通积分。设 $x=\varphi(t)$ $(a<t<b)$ 是方程(8)的任意一个解，则在 $a<t<b$ 内就有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=f(\varphi(t))g(t),$$

因为 $f(\varphi(t))\neq 0$，所以上式可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{f(\varphi(t))}=g(t)\mathrm{d}t,$$

在 (a,b) 内任取一点 t_0，记 $\varphi(t_0)=x_0$，从 t_0 到 t 积分上式两边，推知在 $a<t<b$ 内有

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}\varphi(\tau)}{f(\varphi(\tau))}\equiv\int_{t_0}^{t}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

在上式左端积分中，作代换 $\xi=\varphi(\tau)$，得到

$$\int_{x_0}^{\varphi(t)}\frac{\mathrm{d}\xi}{f(\xi)}\equiv\int_{t_0}^{t}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

所以 $x=\varphi(t)$ 是关系式

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\xi}{f(\xi)}=\int_{t_0}^{t}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\tag{10}$$

所确定的隐函数。即 $x=\varphi(t)$ 可由(9)确定。

反之，若 $x=\psi(t)$ 在某区间 $a<t<b$ 内是由(10)（即由(9)）所确定的隐函数，且 $\psi(t_0)=x_0$。即在 $a<t<b$ 内成立恒等式

$$\int_{x_0}^{\psi(t)}\frac{\mathrm{d}\xi}{f(\xi)}\equiv\int_{t_0}^{t}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

两边关于 t 求导得

$$\frac{1}{f(\psi(t))}\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}=g(t),$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}=f(\psi(t))g(t).$$

所以 $x=\psi(t)$ 是方程(8)的解. 同样可以证明关系式

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\xi}{f(\xi)}=\int_{t_0}^{t}g(\tau)\,\mathrm{d}\tau+C \tag{11}$$

(其中 C 为任意常数)所确定的函数 $x=\psi(t,C)$ 也是方程(8)的解. 所以(11)是方程(8)的通积分.

例 4 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{t}{x}.$$

解 分离变量得到

$$x\,\mathrm{d}x=-t\,\mathrm{d}t,$$

两边积分，就有

$$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}t^2+C_1,$$

C_1 是任意常数.因此,圆周 $t^2+x^2=C^2(C\neq 0)$ 就是通积分.从中可求出通解 $x=\pm\sqrt{C^2-t^2}$.

例 5 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2\cdot\cos t. \tag{12}$$

解 显见 $x\equiv 0$ 是特解. 下设 $x\neq 0$，在(12)两边除以 x^2 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\cos t\,\mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$-\frac{1}{x}=\sin t+C,$$

即有通积分

$$x=-\frac{1}{\sin t+C},$$

显见这个通积分不包含特解 $x=0$，故方程(12)的全部解是

$$x\equiv 0,\quad x=-\frac{1}{\sin t+C}.$$

有些类型的方程，从形式上看，不明显地属于变量可分离的类型，但能通过变量变换化为变量可分离的方程。

如 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$，其中 $f(t,x)$ 满足所谓零次齐次函数的条件：$f(kt,kx)=f(t,x)(k\neq 0)$，我们称之为齐次方程。实际上

$$f(t,x)=f\left(t\cdot 1,\ t\cdot\frac{x}{t}\right)=f\left(1,\ \frac{x}{t}\right)\overset{\text{def}}{=}g\left(\frac{x}{t}\right),$$

这里 $g(u)$ 是 u 的连续函数。

引进新的未知函数 $u=\frac{x}{t}$，即令 $x=ut$，那末由于

$$\frac{dx}{dt}=u+t\frac{du}{dt},$$

所以原方程变为

$$u+t\frac{du}{dt}=g(u),$$

这是变量可分离的方程

$$\frac{du}{dt}=\frac{g(u)-u}{t}. \tag{13}$$

在求得它的全部解之后，再用 $u=\frac{x}{t}$ 代回原变量 t, x,就得到原方程的全部解。

例 6 求解方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{at+bx}{bt-ax}. \tag{14}$$

解 易知方程(14)右端是关于 t, x 的零次齐次函数，此时

$g\left(\frac{x}{t}\right)=\left(a+b\frac{x}{t}\right)\Big/\left(b-a\frac{x}{t}\right)$. 令 $u=\frac{x}{t}$，即 $x=ut$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u=\frac{a+bu}{b-au},$$

因此

$$t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{a+bu}{b-au}-u=\frac{a(u^2+1)}{b-au},$$

分离变量得

$$\frac{b-au}{a(u^2+1)}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

两边积分得

$$\frac{b}{a}\mathrm{tg}^{-1}u-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)=\ln|t|+C_1,$$

其中 C_1 是任意常数。代回原来的变量 x、t，即得(14)的通积分

$$\sqrt{x^2+t^2}=Ce^{\frac{b}{a}\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{t}}.$$

有些方程可以经过所谓的变量平移变换化为齐次方程。例如形如

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right) \tag{15}$$

的方程(这里 a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 都是已知常数，c_1 与 c_2 不全为 0)，作变量的平移变换

$$t=\xi+h,\quad x=\eta+k, \tag{16}$$

其中 h，k 为待定常数。代入方程(15)得

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta+(a_1h+b_1k+c_1)}{a_2\xi+b_2\eta+(a_2h+b_2k+c_2)}\right),$$

因此，只要选取 h，k 满足

$$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0,\\ a_2h+b_2k+c_2=0,\end{cases} \tag{17}$$

则(15)就化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right).$$

注意，当$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，即$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$时，不能由(17)求得$h$和$k$，此时可将原方程(15)写成

$$\frac{dx}{dt}=f\left(\frac{(a_1t+b_1x)+C_1}{\lambda(a_1t+b_1x)+C_2}\right).$$

作变换$y=a_1t+b_1x$，仍得到变量可以分离的方程。

$$\frac{dy}{dt}=a_1+b_1f\left(\frac{y+C_1}{\lambda y+C_2}\right).$$

将它求解，代回原来的变量x，t，就得到(15)的通解或通积分。

例7 求解方程

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x-t+1}{x+t+5}.$$

解 作变量平移变换

$$t=\xi+h,\quad x=\eta+k,$$

其中h，k是待定常数。将之代入原方程得

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta-\xi+(k-h+1)}{\eta+\xi+(k+h+5)},$$

取k，h满足

$$\begin{cases} k-h+1=0, \\ k+h+5=0. \end{cases}$$

即$k=-3$，$h=-2$，得

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta-\xi}{\eta+\xi}.$$

令$u=\frac{\eta}{\xi}$，即$\eta=u\xi$。得

$$u+\xi\frac{du}{d\xi}=\frac{u-1}{u+1},$$

分离变量得

$$-\frac{(u+1)}{1+u^2}du=\frac{d\xi}{\xi},$$

$$-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)-\mathrm{tg}^{-1}u=\ln|C_1\xi|,$$

即 $$-\mathrm{tg}^{-1}u=\ln|C_1\xi\sqrt{1+u^2}|,$$

其中 C_1 为任意常数。代回原变量得

$$\sqrt{(x+3)^2+(t+2)^2}=Ce^{-\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{x+3}{t+2}\right)}.$$

例 8 求解方程

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x+t+1}{2x+2t-1}.$$

解 令 $v=x+t$，则

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dt}-1=-\frac{v+1}{2v-1},$$

因此，有

$$\frac{dv}{dt}=1-\frac{v+1}{2v-1}=\frac{v-2}{2v-1}.$$

分离变量得

$$\frac{2v-1}{v-2}dv=dt,$$

两边积分得

$$2v+3\ln|v-2|=t+C.$$

代回原变量 x，t 得

$$2(x+t)+3\ln|x+t-2|=t+C,$$

即 $$2x+t+3\ln|x+t-2|=C.$$

还有一些可通过其他变量代换化为变量可分离的方程。

例 9 求解方程

$$\frac{dx}{dt}=(x+2t)^2.$$

解 令 $u=x+2t$，得

$$\frac{du}{dt}=\frac{dx}{dt}+2=u^2+2,$$

分离变量得$\frac{du}{u^2+2}=dt$，两边积分得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}}=t+C.$$

代回原变量x，t得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{tg}^{-1}\frac{(x+2t)}{\sqrt{2}}=t+C,$$

即
$$x+2t=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{2}(t+C)).$$

再来看一下例 3，即求解方程$\frac{dx}{dt}=x^2-\frac{2}{t^2}$，作变量变换

$x=\frac{y}{t}$，即$y=xt$，得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot t+x=\left(\frac{y^2}{t^2}-\frac{2}{t^2}\right)t+\frac{y}{t}=\frac{(y-1)(y+2)}{t}.$$

设$y\neq 1,-2$，上列方程可改写为

$$\frac{dy}{(y-1)(y+2)}=\frac{dt}{t},$$

两边积分得

$$\frac{y-1}{y+2}=Ct^3.$$

代回原变量x得

$$\frac{xt-1}{xt+2}=Ct^3.$$

（Ⅱ）能用凑全微分法求积的方程。

(i) 全微分方程

将方程写成对称形式

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \tag{18}$$

其中函数$M(x,y)$和$N(x,y)$在单连通区域G中具有连续的一阶偏导数，它们是已知的。

若方程(18)的左边能写成一个函数 $U(x,y)$ 的全微分，则(18)称为全微分方程。此时有 $\mathrm{d}U(x,y)=0$，即得(18)的通积分为 $U(x,y)=C$。由微积分知，存在 $U(x,y)$ 使

$$\mathrm{d}U(x,y)=M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$$

的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{19}$$

故一般地只需验证条件(19)，就能判别(18)是否为全微分方程.

例 10 求解方程

$$\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0. \tag{20}$$

解 现在 $M=\cos x+\dfrac{1}{y}$，$N=\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}$，有

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2},$$

故(20)是全微分方程。

下面先用分组凑全微分的方程求解。将(20)改写为

$$\cos x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\left(\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)=0,$$

即有

$$\mathrm{d}(\sin x)+\mathrm{d}(\ln|y|)+\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=0,$$

这样，就得出通积分

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=C.$$

还有一种解法称为两次积分法。设找到了全微分函数 $U(x,y)$，则

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\cos x+\frac{1}{y},$$

所以

$$U=\int\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\varphi(y)=\sin x+\frac{x}{y}+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 为待定函数。又由

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$$

得

$$-\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2},$$

所以 $\varphi'(y) = \frac{1}{y}$，即 $\varphi(y) = \ln|y|$，故有

$$U(x,y) = \sin x + \frac{x}{y} + \ln|y|.$$

因之，(20)的通积分是

$$\sin x + \ln|y| + \frac{x}{y} = C.$$

(ii) 乘上积分因子后即能化为全微分方程的方程

有些形为(18)的方程，本身不是全微分方程，但乘上一个适当的函数 $\mu(x,y) \neq 0$ 后，能使方程

$$\mu(x,y)[M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y] = 0 \tag{21}$$

成为全微分方程。此时称 $\mu(x,y)$是方程(18)的积分因子。由于 $\mu(x,y) \neq 0$，所以方程(18)与(21)是等价的。也就是它们的解是一样的。

例如，线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$，写成对称形式 $P(x)y\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$，显见它不是全微分方程，但是可以乘上积分因子 $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，得

$$\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot P(x)y\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y = 0,$$

它可写为

$$\mathrm{d}[\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot y] = 0,$$

故有通积分 $\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}y = C$。从而可得原线性方程的通解

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

例 11 求解方程 $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$。

解 ① 取 $\mu = \frac{1}{y^2}$，得 $\frac{1}{y}\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y = 0$，即

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right) = 0,\ \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

所以有通积分

$$\frac{x}{y}=C.$$

② 取 $\mu=\frac{1}{x^2}$，得 $\frac{y}{x^2}dx-\frac{1}{x}dy=0$，即

$$y\,d\left(-\frac{1}{x}\right)+\left(-\frac{1}{x}\right)dy=0,\ d\left(-\frac{y}{x}\right)=0,$$

所以得通积分

$$\frac{y}{x}=C.$$

③ 取 $\mu=\frac{1}{xy}$，得 $\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0$，即 $d\ln\left(\left|\frac{x}{y}\right|\right)=0$，得通积分 $\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C_1$，或 $\frac{x}{y}=C$.

④ 取 $\mu=\frac{1}{x^2+y^2}$，得 $\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0$，即 $d\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}\right)=0$，

得通积分 $\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}=C_1$，或 $\frac{x}{y}=C$.

⑤ 取 $\mu=\frac{1}{x^2-y^2}$ 得 $\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2-y^2}=0$，即

$$d\left(\ln\sqrt{\left|\frac{x-y}{x+y}\right|}\right)=0,$$

通积分为 $\left|\frac{x-y}{x+y}\right|=C_1$ 或 $\frac{x}{y}=C$.

由这个例子可见，积分因子可能不是唯一的. 熟悉下列一些全微分公式有助于用观察法找积分因子.

$$y\,dx+x\,dy=d(xy),$$

$$x\,dx+y\,dy=d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right),$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = d(\ln\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = d\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 - y^2} = d\left(\ln\sqrt{\left|\frac{x - y}{x + y}\right|}\right),$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{xy} = d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right).$$

求积分因子的一般途径是，根据函数 $\mu(x, y) \neq 0$ 是方程(18)的积分因子的充要条件

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

得出 μ 所满足的关系式

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

由此来决定出函数 μ. 即函数 $\mu(x,y)$是下列偏微分方程

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \tag{22}$$

的解。求解(22)，一般是比较困难的。但若求它的某些特解还是有可能的，也就是说，如果求仅与 x 有关的或仅与 y 有关的积分因子，则(22)就可能变为常微分方程。但这时对于 M 与 N 是有条件限制的。

易知，方程(22)具有只与 x 有关的积分因子 $\mu(x)$ 的充分必要条件是 $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ 只与 x 有关而与 y 无关。这时有积分因子

$$\mu(x)=\exp\left[\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\right].\tag{23}$$

类似地，(22)有只与 y 有关的积分因子 $\mu(y)$ 的充分必要条件是 $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$只与 y 有关而与 x 无关。这时有积分因子

$$\mu(y)=\exp\left[\int-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mathrm{d}y\right].\tag{24}$$

例 12 求解方程

$$(x-y^2)\,\mathrm{d}x+2\,xy\,\mathrm{d}y=0.\tag{25}$$

解 此时 $M=x-y^2$，$N=2xy$，$\frac{\partial M}{\partial y}=-2y$，$\frac{\partial N}{\partial x}=2y$，显然(25)不是全微分方程。此时

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-4y,\ \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{-4y}{2xy}=\frac{-2}{x},$$

故存在仅与 x 有关的积分因子

$$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2}.$$

在方程(25)的两边乘上$\frac{1}{x^2}$，得

$$\frac{1}{x^2}(x-y^2)\mathrm{d}x+2\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0,$$

所以有

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+y^2\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}y^2=0,$$

其通积分为

$$\ln|x|+\frac{y^2}{x}=C.$$

注意，此时

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{-4y}{-(x-y^2)}=\frac{4y}{x-y^2}$$

与x，y均有关，所以不存在仅与y有关的积分因子。

从本质上讲，分离变量法也是用积分因子凑全微分法的特殊应用。事实上，将方程(8)写成对称形式

$$f(x)g(t)\,\mathrm{d}t-\mathrm{d}x=0. \tag{26}$$

除了使$f(x)=0$的m个特解$x=\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$外，设$f(x)\neq0$。在(26)的两边乘上积分因子$\mu(x)=\dfrac{1}{f(x)}$，得

$$g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=0,$$

得全微分函数及通积分为

$$U(t,x)=\int g(t)\mathrm{d}t-\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=C.$$

综合起来看，线性方程，可以化为线性方程的方程、变量可分离的方程、可化为变量可分离的方程都可以视为寻找某种特殊的积分因子而将原方程化为全微分方程，从而可以用求积分求解。因此，一般教科书或参考书常将前面介绍的几种类型的方程统称为可求积的类型。

习　题

1. 求解下列非线性微分方程：

① $xy\,\mathrm{d}x+(x+1)\mathrm{d}y=0$;

② $\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}x=xy\,\mathrm{d}y$;

③ $y'\operatorname{ctg}x+y=2$, $y(0)=-1$;

④ $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, $y(0)=1$;

⑤ $y'=\sqrt{4x+2y-1}$;

⑥ $x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+t=1$;

⑦ $(x+2y)\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$;

⑧ $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$;

⑨ $y^2+x^2y'=xyy'$;

⑩ $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;

⑪ $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$;

⑫ $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$;

⑬ $2y' + x = 4\sqrt{y}$;

⑭ $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$;

⑮ $x\,dx = (x^2 - 2y + 1)\,dy$;

⑯ $(x+1)(yy' - 1) = y^2$;

⑰ $x(e^y - y') = 2$;

⑱ $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$;

⑲ $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$;

⑳ $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$;

㉑ $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$;

㉒ $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$;

㉓ $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$;

㉔ $\int_0^x (x - t)y(t)\,dt = 2x + \int_0^x y(t)\,dt$;

㉕ $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0$;

㉖ $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})\,dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$;

㉗ $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$;

㉘ $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0$;

㉙ $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$;

㉚ $xy^2(xy' + y) = 1$;

㉛ $\left(y - \dfrac{1}{x}\right)dx + \dfrac{dy}{y} = 0$;

㉜ $y^2dx + (e^x - y)\,dy = 0$;

㉝ $x^2y(y\,dx + x\,dy) = 2y\,dx + x\,dy$;

㉞ $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y\,dy = 0$;

㉟ $(x^2 + 1)(2x\,dx + \cos y\,dy) = 2x\sin y\,dx$;

2. 对于怎样的 α 和 β，方程 $y' = ax^{\alpha} + by^{\beta}$ 可以用代换 $y = z^{n}$ 变为齐次的？

3. 解微分积分方程

$$\int_0^x \sqrt{1 + y'^2(\xi)}\, d\xi = 2x^{\frac{1}{2}} + y(x).$$

(提示：两边求导，利用条件 $y(0) = 0$。)

4. 若 $x\int_0^x y(\xi)\, d\xi = (x+1)\int_0^x \xi y(\xi)\, d\xi$，求 y。

5. 解积分方程

$$\int_0^1 \varphi(\alpha x)\, dx = n\varphi(x).$$

6. 解函数方程

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}.$$

其中 $f(x)$ 为未知函数，且假定 $f'(0)$ 存在。

7. 利用积分因子分别解一阶线性方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 和贝努利方程 $y' + p(x)y = q(x)y^{n}(n \neq 0, 1)$。

8. 若方程 $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ 有只依赖于 t 的积分因子，试证它一定是线性方程。

9. 试求出方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

具有形状为 $\mu(x+y)$ 及 $\mu(x \cdot y)$ 的积分因子的充分必要条件。

10. 已知曲线上的任意两点 P 和 Q 之间的弧长与 P 和 Q 到定点的距离之差成正比，试求这曲线。

(提示：用极坐标。)

11. 一质量为 m 的质点，有大小与时间立方成正比(比例系数为 k_1)的外力作用在其上，从初速为零开始作直线运动。此外，质点又受阻力，其大小与速度和时间的乘积成正比(比例系数为 k_2)，试求速度函数 $v(t)$。

12. 设一摩托艇在湖水中行驶，水的阻力与艇速成正比，设在艇速达到10千米/小时时发动机停止工作，经过20秒，艇速是6千米/小时，试求在发动机停止工作后20秒时的艇速。

§2 导数未解出的一阶方程

导数未解出的一阶方程的一般形状为

$$F(t,x,\dot{x})=0. \tag{1}$$

这类方程的求解关键在于首先应用直接法或引入参数的方法，将(1)化为导数已解出的一阶方程，然后用§1中的方法求解之。具体的类型有以下几种：

一、能直接解出导数的方程

如果能从(1)中直接解出导数 $\dot{x}$，即能得到一个或几个形如

$$\dot{x}=f_i(t,x)\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

的方程，则用§1中的方法求解这些导数已解出的方程，就求得了原方程(1)的全部解。

例1 求解方程

$$\dot{x}^2-x^2=0.$$

解 原方程可写成

$$(\dot{x}-x)(\dot{x}+x)=0.$$

从中直接解出 $\dot{x}$，得到两个方程

$$\dot{x}=x \text{ 及 } \dot{x}=-x.$$

分别求解这两个方程，得到

$$x=C\mathrm{e}^t \text{ 及 } x=C\mathrm{e}^{-t}.$$

显见，取 $C=0$ 时，方程有解 $x\equiv0$. 这些就是原方程的全部解。积分曲线的分布如图5.1. 它们充满了全平面，过平面上(除了 t 轴外)任一点，皆有两条积分曲线，t 轴本身就是积分曲线. 图5.1中的实线表示积分曲线 $x=C\mathrm{e}^t$，虚线表示积分曲线 $x=C\mathrm{e}^{-t}$.

二、能解出未知函数 $x=g(t,\dot{x})$ 或能解出自变量 $t=h(x,\dot{x})$ 的方程

有时从方程(1)不易解出 $\dot{x}$，或即使易于解出 $\dot{x}$，但对这个解出导

数的方程不易用 §1 中方法求解. 此时若易于从(1)解出 x 或 t, 即得方程

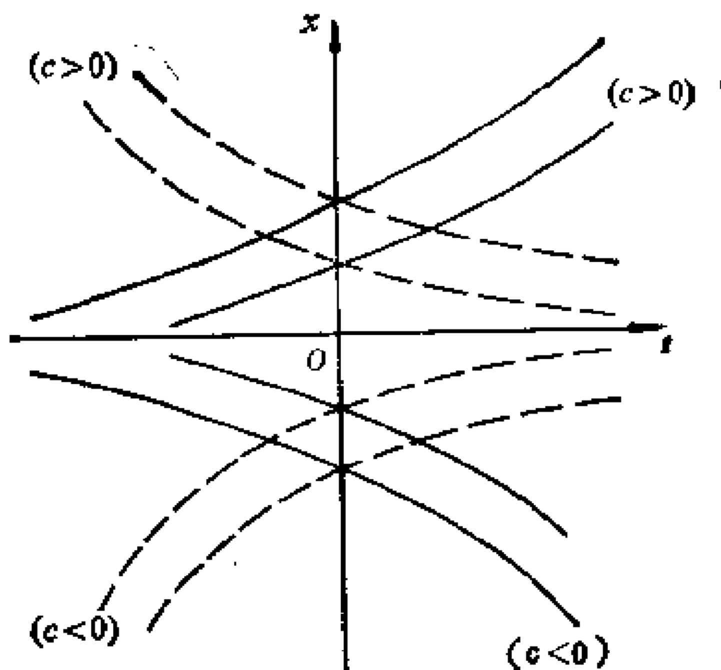


图 5.1

$$x=g(t,\dot{x}) \tag{2}$$

或

$$t=h(x,\dot{x}), \tag{3}$$

则可以用求解通积分的参数形式(以 $p=\dot{x}$ 为参数)来求解. 先来看几个例子.

例 2 求解方程

$$x=\dot{x}^2-t\dot{x}+\frac{t^2}{2}. \tag{4}$$

解 令 $p=\dot{x}$, 则方程(4)可写为

$$x=p^2-tp+\frac{t^2}{2}. \tag{5}$$

在(5)的两边对 t 求导(这实际上是消去 x 的一种方法)得

$$p=2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-p-t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+t,$$

即

$$(2p-t)\left(1-\frac{dp}{dt}\right)=0。\tag{6}$$

由(6)解得 $p=\frac{t}{2}$，代入(5)得

$$x=\frac{t^2}{4}-\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}=\frac{t^2}{4}.$$

这是(4)的特解。由(6)还可以解得$\frac{dp}{dt}=1$，积分之得

$$p=t+C.$$

将它代入(5)得

$$x=(t+C)^2-t(t+C)+\frac{t^2}{2}=C(t+C)+\frac{t^2}{2}.$$

这是(4)的通解。(4)的全部解就是

$$x=C(t+C)+\frac{t^2}{2}\text{ 及 }x=\frac{t^2}{4}.$$

要注意的是不能由 $p=\frac{t}{2}$，及 $p=\frac{dx}{dt}$，从而积分$\frac{dx}{dt}=\frac{t}{2}$，得出 $x=\frac{t^2}{4}+C$，因为这不是(4)的通解。实际上，将 $x=\frac{t^2}{4}+C$ 代入(5)得 $C=0$，即仅 $x=\frac{t^2}{4}$ 为(4)的特解。同样地也不能由 $p=t+C$ 及 $p=\frac{dx}{dt}$，再通过积分去做，这样任意常数增多了，$x=\frac{t^2}{2}+Ct+D$，其中 C 与 D 为任意常数，它也不是(4)的通解，因若将其代入(5)得 $D=C^2$，即只有函数 $x=C(t+C)+\frac{t^2}{2}$ 是(4)的通解。

从(5)得到(6)的过程实际上是把原来的一阶方程变为二阶方程，故若从 $p=\frac{dx}{dt}$ 积分求得的解是二阶方程的解，须代回原来一阶方程(4)加以验证。

例 3 求解方程

$$\dot{x}^3-4tx\dot{x}+8x^2=0。\tag{7}$$

解 令 $p=\dot{x}$，则(7)可以改写为

$$p^3-4txp+8x^2=0。\tag{8}$$

从(8)解出 t 得

$$t=\frac{p^3+8x^2}{4xp}=\frac{p^2}{4x}+\frac{2x}{p}。$$

在上式两边对 x 求导(这实际上是消去 t 的一种方法)，得到

$$\frac{1}{p}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{p^2}{4x^2}+\frac{2p}{4x}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{p}-\frac{2x}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

即
$$\left(\frac{p^2}{4x^2}-\frac{1}{p}\right)=\left(\frac{p}{2x}-\frac{2x}{p^2}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}。$$

显见，$x\equiv0$ 是(7)的特解，但 $x\equiv C(C\neq0)$ 不是(7)的解。因此可设 $x\neq0$，$p\neq0$ 得

$$(p^3-4x^2)\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=0。\tag{9}$$

由(9)式得 $p^3=4x^2$，即 $p=(4x^2)^{1/3}$，将之代入(8)得

$$4x^2-4tx(4x^2)^{1/3}+8x^2=0,$$

即得(7)的特解 $x=\frac{4}{27}t^3$。又由(9)式得

$$\frac{1}{2x}-\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0,$$

解得 $|p|=\tilde{C}\sqrt{|x|}$，其中 $\tilde{C}$ 是任意非负常数。将它代入(8)得

$$\tilde{C}^3|x|^{\frac{3}{2}}-4tx\tilde{C}|x|^{\frac{1}{2}}+8x^2=0,$$

或写成

$$\tilde{C}^3-4\tilde{C}t+8|x|^{\frac{1}{2}}=0,$$

即
$$|x|=\left(\frac{\tilde{C}^3-4\tilde{C}t}{8}\right)^2。$$

记 $D=\frac{\tilde{C}}{2}$，上式可写为

$$|x| = (D^3 - Dt)^2 = D^2(D^2 - t^2).$$

如果又记 $C^* = D^2$，得

$$|x| = C^*(C^* - t)^2,$$

即得(7)的通解为

$$x = C(C - t)^2.$$

加上特解 $x = \frac{4}{27}t^3$ 组成(7)的全部解。(7)的积分曲线的分布如图5.2，图中实线代表积分曲线 $x = \frac{4}{27}t^3$，虚线代表一族积分曲线 $x = C(C - t)^2$。易从图中看到过全平面中任一点至少有两条积分曲线。

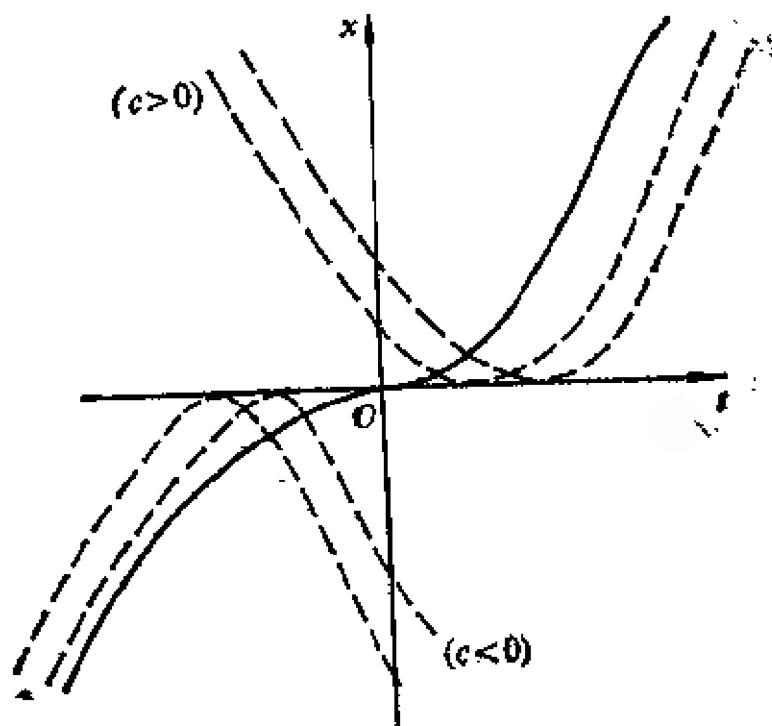


图 5.2

再来看一般情形。

(i) 对未知函数解出的情形：$x = g(t, \dot{x})$。

在方程的两边对 t 求导得

$$p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g(t, p)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, p)}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

设$\frac{\partial g(t,\ p)}{\partial p}\neq 0$，上列方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\left[\ p-\frac{\partial g(t,\ p)}{\partial t}\right]\Big/\frac{\partial g(t,\ p)}{\partial p},\tag{10}$$

这是一个以 p 为未知函数，t 为自变量，导数$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$已解出的方程．若用§1中的解法，能得(10)的通解 $p=\varphi(t,C)$。易知 $x=g(t,\varphi(t,C))$ 是原方程 (7) 的通解。又若用§1中的解法，能得(10)的通积分 $\Phi(t,p,C)=0$，则方程(2)的通积分为如下的参数形式：

$$\begin{cases}\Phi(t,p,C)=0,\\ x=g(t,p).\end{cases}$$

(ii) 对自变量解出的情形：$t=h(x,\dot{x})$。

在方程的两边对 x 求导得

$$\frac{1}{p}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial h(x,\ p)}{\partial x}+\frac{\partial h(x,\ p)}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

设$\frac{\partial h(x,\ p)}{\partial p}\neq 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{1}{p}-\frac{\partial h(x,\ p)}{\partial x}\right]\Big/\frac{\partial h(x,\ p)}{\partial p}.\tag{11}$$

这是一个以 p 为未知函数，x 为自变量，导数$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$已解出的方程．若用§1中的解法可得(11)的通解为 $p=\psi(x,C)$，易知 $t=h(x,\psi(x,C))$ 是原方程(3) 的通解。又若用§1中的解法能得 (11) 式的通积分为 $\Phi(x,p,C)=0$，因此(3)的通积分为以下的参数形式：

$$\begin{cases}\Phi(x,p,C)=0,\\ t=h(x,p).\end{cases}$$

三、不显含未知函数 x 或不显含自变量 t 的隐式方程

(i) 不显含未知函数 x 的隐式方程

$$F(t,\dot{x})=0.\tag{12}$$

下面用例子来说明(12)的解法.

例 4 求解方程

$$t^3+\dot{x}^3-2t\dot{x}=0. \tag{13}$$

解 令 $p=\dot{x}$，则方程(13)可改写为

$$t^3+p^3-2tp=0. \tag{14}$$

作变量代换 $p=s\cdot t$，将之代入(14)得

$$t^3+s^3t^3-2st^2=0,$$

可以解得

$$t=\varphi(s)=\frac{2s}{1+s^3}.$$

注意到 $dx=p\,dt$，就有

$$\begin{aligned} dx &= st\,dt = s\varphi(s)\varphi'(s)\,ds \\ &= s\frac{2s}{1+s^3}\left(\frac{2s}{1+s^3}\right)'ds, \end{aligned}$$

积分之得

$$x=\frac{3(1+4s^3)}{2(1+s^3)^2}+C.$$

原方程(13)的通解有以 s 为参数的参数形式表示：

$$\begin{cases} t=\dfrac{2s}{1+s^3}, \\ x=\dfrac{3(1+4s^3)}{2(1+s^3)^2}+C. \end{cases}$$

(ii) 不显含自变量的隐式方程

$$F(x,\dot{x})=0. \tag{15}$$

下面也只用例子说明解法.

例 5 求解方程

$$x^2(\dot{x}-1)=(2-\dot{x})^3. \tag{16}$$

解 令 $p=\dot{x}$，则(16)可改写为

$$x^2(p-1)=(2-p)^3. \tag{17}$$

作变量代换 $2-p=x\cdot s$，即 $p-1=1-x\cdot s$，代入(17)得

$$x^2(1-x\cdot s)=x^2s^2.$$

注意到 $x=0$ 不是(16)的解，故可设 $x\neq 0$，即有

$$1-xs=s^2,$$

或写成

$$x=\frac{1-s^2}{s}=\frac{1}{s}-s.$$

故得

$$p=2-x\cdot s=2-(1-s^2)=1+s^2.$$

又

$$dx=\left(\frac{1-s^2}{s}\right)'ds=-\frac{(1+s^2)}{s^2}ds,$$

且

$$dt=\frac{1}{p}dx=\frac{1}{1+s^2}\left[-\frac{(1+s^2)}{s^2}\right]ds=-\frac{1}{s^2}ds,$$

由此解得 $t=\frac{1}{s}+C$。从它得到

$$s=\frac{1}{t-C},$$

即得方程(16)的通解为

$$x=t-C-\frac{1}{t-C}.$$

四、克莱洛(Clairaut)方程

下面考虑一种特殊的未知函数已解出的方程，它的未知函数的导数未解出，形如

$$x=tp+f(p) \tag{18}$$

的方程称为克莱洛方程。

例 6 求解方程

$$x=t\dot{x}+\sqrt{1+\dot{x}^2}, \tag{19}$$

解 令 $p=\dot{x}$，则(19)变成标准的克莱洛方程

$$x=tp+\sqrt{1+p^2}. \tag{20}$$

两边对 t 求导得

$$p=p+t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\left(t+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=0. \tag{21}$$

由上式得

$$t=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \tag{22}$$

将它代入(19)或(20)得

$$x=-\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}+\sqrt{1+p^2}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{23}$$

从(22)与(23)中消去 p 得

$$x^2+t^2=1$$

这是单位圆的表达式。它是一个特解的积分曲线。

又由(21)得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=0$，即 $p=C$，将之代入(19)得

$$x=Ct+\sqrt{1+C^2},$$

这是一族直线，它是方程(19)的通解。

下面来看一下克莱洛方程的一般解法。在方程(18)的两边对 t 求导得

$$p=p+t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+f'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t+f'(p))=0,$$

由此得 $t+f'(p)=0$，即 $t=-f'(p)\overset{\text{def}}{=}X(p)$，将之代入原方程(18)

得 $x=tp+f(p)=-f'(p)p+f(p)\overset{\text{def}}{\equiv}Y(p)$。这样就得到了方程(18)的以 p 为参数的参数形式的一条特殊的积分曲线

$$t=X(p),\quad x=Y(p),$$

又可得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=0$，即得 $p=C$。代入(18)得一族直线

$$x=Ct+f(C)。$$

这就是(18)的通解。

习　　题

1. 求解下列方程：

① $(x^2+1)y'^2=1$；

② $xyy'^2+(y^2+x^2)y'+xy=0$；

③ $yy'^2-4a^2xy'+a^2y=0(a\neq0)$；

④ $2yy'^3-yy'^2+2xy'-x=0$。

2. 求下列方程的通解或通积分：

① $ay'^3+by'^2+my'+n=0$ （$a\neq0,a,b,m,n$ 均为实常数）；

② $\mathrm{e}^{y'}\cos y'=0$；

③ $x\sqrt{1+y'^2}-y'=0$；

④ $y'^3-x^3(1-y')=0$；

⑤ $y'^3+y^3-3yy'=0$；

⑥ $y=2xy'+\frac{1}{2}x^2+y'^2$；

⑦ $y'^2\cos^2 y+y'\sin x\cos x\cos y-\sin y\cos^2 x=0$；

（提示：令 $u=\sin y$，$v=\sin x$。）

⑧ $(x^2-a^2)y'^2-2xyy'-x^2=0$；

⑨ $xy^2y'^2-2y^3y'+2xy^2-x^3=0$；

（提示：令 $u=y^2$。）

⑩ $y'^2(x+\sin y')=y$；

⑪ $y=xy'+\frac{1}{y'}$；

⑫ $y = xy' + y' - y'^2$；

⑬ $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}$；

⑭ $x^2(y - xy') = yy'^2$；

（**提示**：令 $u = x^2$，$v = y^2$）。

⑮ $y'^2 - 3xy^{\frac{2}{3}}y' + 9y^{\frac{5}{3}} = 0$；

（**提示**：令 $y = u^3$。）

⑯ $4yy'^2 + 2xy' - y = 0$。

（**提示**：用 y 乘方程两边并令 $u = y^2$。）

3．求曲线，使它的切线在两坐标轴之间的线段长度等于常数 a。

4．一质点在重力作用下沿曲线无摩擦地滑动，在水平方向成等速运动，求此曲线。

（**提示**：利用能量守恒定律知 $\dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mgy$。）

5．证明方程 $x^2y'^2 + 3xyy' + 3y^2 = 0$ 只有零解。

（**提示**：将原方程改写为 $\left(xy' + \dfrac{3}{2}y\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 = 0$。）

§3 高阶非线性方程

高阶非线性方程的一般形式为

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

其中 $n \geqslant 2$。称(1)为 n 阶非线性微分方程。尽管对(1)的求解比较难，有的甚至不能求得用分析形式表示的解的，但仍有一些类型的方程是可以求解的，其基本思想是通过适当的变量变换使(1)降低阶数。下面分别讨论几种特殊类型的高阶非线性方程的求解。

一、不显含未知函数 x 的方程

现讨论不显含未知函数 x 的方程

$$F(t, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{2}$$

或不显含未知函数 x 及直到 $k-1(n \geqslant k \geqslant 1)$ 阶导数的方程

$$F(t, x^{(k)}, \cdots, x^{(n)}) = 0. \tag{3}$$

显见，可以分别作变量代换 $\dot{x} = y$ 或 $x^{(k)} = z$ 将(2)和(3)分别化为

$$F(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}) = 0 \tag{4}$$

和

$$F(t, z, \dot{z}, \cdots, z^{(n-k)}) = 0, \tag{5}$$

其中方程(4)或(5)的阶数均小于n，因而求解起来一般要比求解n阶非线性方程(2)来得容易些。

例 1 求解方程

$$x'' + \frac{1}{t}x' = 0.$$

解 令$x' = p$，则得 $p' + \frac{1}{t}p = 0$，易得 $p = \frac{C_1}{t}$，其中 C_1 为任意常数。于是有 $x' = p = \frac{C_1}{t}$，积分得原方程的解

$$x = C_1 \ln|t| + C_2,$$

其中 C_2 为另一任意常数。

例 2 求解方程

$$x^{(4)} - \frac{1}{t}x^{(3)} = 0.$$

解 令 $x^{(3)} = y$，则原方程化为

$$y' - \frac{1}{t}y = 0.$$

其全部解为 $y = Ct = 24C_1t$，$(C = 24C_1)$。再解方程 $x^{(3)} = 24C_1t$，将之积分三次得原方程的通解为

$$x = C_1t^4 + C_2t^2 + C_3t + C_4,$$

其中 C_1，C_2，C_3，C_4 是四个任意常数。

二、不显含自变量 t 的方程

它的一般形状是

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \cdots, x^{(n)}) = 0. \tag{6}$$

为了达到降阶的目的，可以令 $p=\dot{x}$ 作为新的未知函数，而把 x 作为新的自变量，由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$=p\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^2+p^2\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x}.$$

……

用数学归纳法容易证明，$\frac{\mathrm{d}^kx}{\mathrm{d}t^k}$ 可以用 $p,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{k-1}p}{\mathrm{d}x^{k-1}}$ 表出（$k\leqslant n$）。把这些表达式代入原方程(6)，得到

$$F\left(x,p,p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},\ \cdots\right)=0,$$

即新的方程

$$G\left(x,\ p,\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)=0,$$

它比原方程(6)降低了一阶。

例 3 求解方程

$$x''+\frac{x'^2}{1-x}=0. \tag{7}$$

解 令 $p=x'$，则 $x''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，将之代入原方程(7)得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{p^2}{1-x}=0. \tag{8}$$

显见 $x\equiv C$ 是(7) 的解，即 $p=0$ 是上述方程(8)的解，设 $p\neq 0$，就有

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}+\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=0,$$

解得 $p=C_1(x-1)$。所以

$$\frac{dx}{dt}=C_1(x-1),$$

故有 $x-1=C_2e^{C_1t}$。(7)的全部解是

$$x=1+C_2e^{C_1t},$$

$C_1=0$ 时对应 $x\equiv C$ 的解。

例 4 求解方程

$$t\frac{d^2x}{dt^2}-e^{\frac{d^2x}{dt^2}}-\frac{dx}{dt}=0. \tag{9}$$

解 令 $y=\frac{dx}{dt}$，$p=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}$，则方程(9)化为

$$tp-e^p-y=0,$$

即

$$y=tp-e^p. \tag{10}$$

这是克莱洛方程，立即得到通解

$$y=Ct-e^C.$$

对应(9)的通解是方程

$$\frac{dx}{dt}=Ct-e^C$$

的通解，易知它们为

$$x=\frac{1}{2}Ct^2-e^Ct+C^*,$$

其中 C^* 为任意常数。又(10)的特解为

$$\begin{cases}t=e^p,\\ y=tp-e^p,\end{cases}$$

即

$$y=t(\ln|t|-1).$$

对应(9)的特解为方程

$$\frac{dx}{dt}=t(\ln|t|-1).$$

即可解得(9)的解为

$$x=\int t(\ln|t|-1)\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}\ln|t|-\frac{3}{4}t^2+\tilde{C},$$

这里 $\tilde{C}$ 为任意常数.

例 5 求解方程

$$x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=0. \tag{11}$$

解 显见（11）中不显含自变量 t，可将 x 视为新的自变量，$y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 视为新的未知函数，则

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

故(11)变为

$$xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y^2=0.$$

显见 $y\equiv0$ 是此方程的解（即 $x\equiv$ 常数 C 是(11)的解）。设 $y\neq0$,则得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即有 $y=C_1x$，其中 C_1 为任意常数. 再从方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=C_1x$，解得 $x=C_2\mathrm{e}^{C_1t}$，其中 C_2 为任意常数. 这就求得方程（11）的全部解为

$$x=C_2\mathrm{e}^{C_1t}.$$

三、齐 次 方 程

设方程(1)中左端 F 关于$(x,\dot{x},\cdots,x^{(n)})$ 满足如下的 m 次齐次条件：

$$F\left(t,kx,k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,k\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}\right)=k^mF\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}\right). \tag{12}$$

就说(1)是齐次方程。这时，显然有

$$F\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}\right)=F\left(t,x\cdot1,x\cdot\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,x\cdot\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}\right)$$

$$=x^nF\left(t,1,\frac{1}{x}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{1}{x}\ \frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}\right),$$

因而若作变量代换

$$y=\frac{1}{x}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\tag{13}$$

即有$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xy$，且$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=xy^2+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，即

$$\frac{1}{x}\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

一般地，用数学归纳法可证：$\frac{1}{x}\ \frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}$能用 y，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，…，$\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}$表示。显见方程(1)可以由 $n-1$ 阶方程

$$\tilde{F}(t,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=0$$

代替，未知函数为 y，自变量为 t。

仍以前面例 5 为例来说明。其中

$$F\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)=x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2,$$

它是关于 x，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$为 2 次的齐次函数，即

$$F\left(t,\ kx,\ k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ k\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)=(kx)\left(k\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)-\left(k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$=k^2\left[x\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]=k^2F\left(t,x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

为此作变量变换

$$y=\frac{1}{x}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

即 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xy$，于是$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=x\left(y^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$，将它们代入原方程得

$$x^2\left(y^2+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)-x^2y^2=0,$$

即$\frac{dy}{dt}=0$,解得 $y\equiv C_1$.从而又得方程$\frac{dx}{dt}=C_1x$, 解得 $x=C_2e^{C_1t}$.

故原方程的全部解是$x=C_2e^{C_1t}$.

例 6 求解方程

$$t^2x\frac{d^2x}{dt^2}=\left(x-t\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{14}$$

解 显见

$$F\left(t,x,\frac{dx}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}\right)=t^2x\frac{d^2x}{dt^2}-\left(x-t\frac{dx}{dt}\right)^2$$

是x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$的 2 次齐次函数. 又 $x\equiv0$ 是方程(14)的特解.

设 $x\neq0$, 令 $y=\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}$, 即 $x=e^{\int ydt}$, 故有

$$\frac{dx}{dt}=ye^{\int ydt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{dy}{dt}+y^2\right)e^{\int ydt}.$$

将它们代入(14)得

$$t^2\left(\frac{dy}{dt}+y^2\right)e^{2\int ydt}=(1-ty)^2e^{2\int ydt},$$

即

$$t^2\frac{dy}{dt}+t^2y^2=1-2ty+t^2y^2,$$

或写为

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1-2ty}{t^2}=-\frac{2}{t}y+\frac{1}{t^2}.$$

解得

$$y=\frac{1}{t}+\frac{C_1}{t^2}.$$

从而得到原方程(14)的全部解是

$$x = C_2 t \, \mathrm{e}^{-\frac{C_1}{t}},$$

其中 C_1 与 C_2 为任意常数。

四、全微分方程

类似于一阶方程中的全微分方程，高阶方程中也有全微分方程。若对(1)中的 F，存在着某个 $n-1$ 阶的微分表达式 $\Phi(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n-1)})$ 使

$$F(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n-1)}), \tag{15}$$

则称(1)是全微分方程。显见此时有 $n-1$ 阶方程

$$\Phi(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n-1)}) = C_1, \tag{16}$$

其中 C_1 为任意常数。若能求得(16)的全部解

$$x = \varphi(t; C_1, C_2, \cdots, C_n),$$

则它也是(1)的全部解，其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 均为任意常数。

与方程为一阶时的情形一样，有时(1)本身不是全微分方程，但是乘上某个适当的函数 $\mu(t, x, \cdots, x^{(n-1)})$ 后，能使方程

$$\mu(t, x, \cdots, x^{(n-1)}) F(t, x, \dot{x}, \cdots, x^{(n)}) = 0$$

成为全微分方程，这时就称 $\mu(t, x, \cdots, x^{(n-1)})$ 是方程(1)的积分因子。

现仍回到例 5。方程（11）本身不是全微分方程。显见 $x \equiv 0$ 是(11)的解。设 $x \neq 0$，则可取积分因子 $\mu = \frac{1}{x^2}$，用它乘(11)的两边得

$$\frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 = 0,$$

即

$$\frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{x} \right) \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) = 0,$$

或写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right] = 0,$$

故有通积分 $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=C_1$。于是得出原方程(11)的全部解为 $x=C_2e^{C_1t}$，其中 C_1 与 C_2 均为任意常数。

例 7 一个质量为 m 的质点，在只依赖于其位置 x 的外力 $f(x)$ 的作用下，运动方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f(x), \tag{17}$$

求其解。

解 显见(17)不是全微分方程。但是可以用积分因子 $\mu=\frac{dx}{dt}$ 乘上(17)两边，所得方程的全微分方程，即

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=f(x)\frac{dx}{dt},$$

或写为

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi\right]=0,$$

积分之得

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2_{x=x_0}=\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi. \tag{18}$$

此式的力学意义是，由位移从 x_0 变到 x 所引起的动能的变化等于外力 $f(x)$ 在这段位移中所作的功。这就是所谓的动能定律。方程(18)是一阶方程，易由前面的解法解得。

当然方程(17)也可以看为不显含自变量 t 的方程，用前面的方法求解如下：令 $p=\frac{dx}{dt}$，则(17)化为

$$mp\frac{dp}{dx}=f(x),$$

故 $mp\,dp=f(x)\,dx$，两边积分得

$$\frac{1}{2}mp^2(x)-\frac{1}{2}mp^2(x_0)=\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi,$$

即有

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2_{x=x_0}=\int_{x_0}^{x}f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

也就得到了(18)式。

习　题

1. 求解下列方程：

① $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-t\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+\left(\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)^3=0$；

② $x\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=x^2\ln x$；

③ $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}=\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$；

④ $t\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t^2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$；

⑤ $t\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+t\sin\left(\dfrac{1}{t}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$；

⑥ $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=2\mathrm{e}^{-x}$；

⑦ $x\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+15x^2\sqrt{t}$；

⑧ $\dfrac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}=2\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-1\right)\operatorname{ctg}t$。

2. 求出满足下列给定的初始条件的解：

① $yy''=2xy'^2$，$y(2)=2$，$y'(2)=0.5$；

② $2y'''-3y'^2=0$，$y(0)=-3$，$y'(0)=1$，$y''(0)=-1$；

③ $x^2y''-3xy'=\dfrac{6y^2}{x^2}-4y$，$y(1)=1$，$y'(1)=4$；

④ $y'''=3yy'$，$y(0)=-2$，$y'(0)=0$，$y''(0)=4\dfrac{1}{2}$；

⑤ $y''\cos y-y'^2\sin y=y'$，$y(-1)=\dfrac{\pi}{6}$，$y'(-1)=2$。

3. 一个物体只受地球引力的作用，从高处落下，如果已知地球半径为 6400 千米，试求该物体落地时的速度。

4. 一个质点徐徐沉入液体，设下沉时的反作用与速度成正比，试求质点的运动。

5. 求曲线 $y=y(x)$，使它在任意一点 (x,y) 处的曲率等于在这点 (x,y) 的切线与横轴交角的正弦。

6. 设有质量为 2 千克的物体，受到与物体位移的三次方成正比的力的作用（比例常数为 1）。已知位移等于 1 米时的速度为 0.5 米/秒，试求该物体的运动。

§4 非线性方程组

n 个未知函数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的非线性常微分方程组的一般形状是

$$F_j(t,x_1,\dot{x}_1,\cdots,x_1^{(m_1)};\cdots;\ x_n,\dot{x}_n,\cdots,x_n^{(m_n)})=0, \quad (j=1,2,\cdots,k). \tag{1}$$

一般说来，方程的个数 k 和未知函数的个数 n 不一定相等。下面仅讨论 $k=n$ 的情形。先考虑最高阶导数能被解出的方程组，即

$$\begin{cases} x_1^{(m_1)}=f_1(t,x_1,\dot{x}_1,\cdots,x_1^{(m_1-1)};\cdots;x_n,\dot{x}_n,\cdots,x_n^{(m_n-1)}); \\ x_2^{(m_2)}=f_2(t,x_1,\dot{x}_1,\cdots,x_1^{(m_1-1)};\cdots;x_n,\dot{x}_n,\cdots,x_n^{(m_n-1)}); \\ \cdots\cdots \\ x_n^{(m_n)}=f_n(t,x_1,\dot{x}_1,\cdots,x_1^{(m_1-1)};\cdots;x_n,\dot{x}_n,\cdots,x_n^{(m_n-1)}). \end{cases} \tag{2}$$

上述方程组(2)称为标准的方程组。方程组(2)的解是指确定在 $a<t<b$ 内的 n 个函数 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots$，$x_n(t)$，如果把它们代入(2)后能得到在 $a<t<b$ 内的 n 个恒等式。特别地，当 $m_1=m_2=\cdots=m_n=1$ 时，标准的一阶微分方程组是

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,x_2,\cdots,x_n). \end{cases} \tag{3}$$

在前面线性方程组的情形，已经知道，一个 n 阶线性方程可以化为由 n 个方程组成的一阶线性方程组。现以 x 为未知函数的标准的 n 阶非线性方程

$$x^{(n)} = f(t, x, x^1, \cdots, x^{(n-1)}) \tag{4}$$

为例说明其解法。

引进新的未知函数

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}, \cdots, x_n = x^{(n-1)},$$

则(4)可化为标准的一阶方程组

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ \cdots\cdots \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{cases} \tag{5}$$

如果求得了 n 阶方程(4)的解 $x = \varphi(t)$，那末函数组

$$x_1 = \varphi(t),\ x_2 = \varphi^1(t), \cdots,\ x_n = \varphi^{(n-1)}(t)$$

就是方程组(5)的解．反之，如果求得了方程组(5)的解

$$x_1 = \psi_1(t),\ x_2 = \psi_2(t), \cdots,\ x_n = \psi_n(t),$$

则 $x = \psi_1(t)$ 就是 n 阶方程(4)的解。因此，在这种意义下，我们把(5)与(4)看成是等价的．

一般地，对标准方程组(2)，可用引进新的未知函数的方法将它化为标准的一阶方程组(3)。因此，我们下面着重讨论方程组(3)的求解方法。

一、化为高阶方程

高阶方程仅有一个未知函数，求解比方程组要容易些。下面以例子说明如何把方程组的求解化为高阶方程来求解．

例 1 求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = 0, & (6)_1 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + x = 0. & (6)_2 \end{cases}$$

解 用类似消去法的思想消去 x，以得到关于 y 的高阶方程。

由 $(6)_2$ 得到 $x=-\frac{d^2y}{dt^2}$，将之代入 $(6)_1$ 得

$$-\frac{d^4y}{dt^4}-\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{dy}{dt}+y=0,$$

这是一个常系数线性方程，其相应的特征方程为

$$\lambda^4+\lambda^3-\lambda-1=0,$$

即

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+1)=0,$$

得特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\lambda_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

故有通解

$$y=C_1e^t+C_2e^{-t}+\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}.$$

由于

$$y'=C_1e^t-C_2e^{-t}+e^{-\frac{1}{2}t}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_4-\frac{1}{2}C_3\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{1}{2}C_4\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

所以得

$$x=-y''=-C_1e^t-C_2e^{-t}$$
$$+e^{-\frac{1}{2}t}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_4-\frac{1}{2}C_3\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}C_4-\frac{\sqrt{3}}{2}C_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right],$$

其中 C_1,C_2,C_3,C_4 均为任意常数。

例 2 求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\dfrac{1}{y}, & (7)_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{x-t}. & (7)_2 \end{cases}$$

解 由$(7)_2$解得

$$x=t+\frac{1}{y'},$$

将之代入 $(7)_1$ 得

$$1-\frac{1}{y}=x'=1-\frac{1}{(y')^2}y'',$$

即有 $y''-\dfrac{y'^2}{y}=0$。这是以 y 为未知函数的二阶方程，不显含自变量 t，可令 $p=y'$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，故得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\frac{p^2}{y}=0.$$

因为 $y\equiv$常数不是解，故可设 $p\neq0$，由上式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}=\frac{y}{p},$$

解之得 $p=C_1y$。从而得到方程

$y'=C_1y$，求得通解 $y=C_2\mathrm{e}^{C_1t}$。由此可得到

$$x=t+\frac{1}{C_1C_2}\mathrm{e}^{-C_1t},$$

其中 C_1，C_2 均为任意非零常数。故$(7)_1$、$(7)_2$的全部解是

$$\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{C_1C_2}\mathrm{e}^{-C_1t}, \\ y=C_2\mathrm{e}^{C_1t}. \end{cases}$$

二、化为部分的全微分方程（首次积分法）

类似于高阶方程用积分因子化为全微分方程的方法，我们可以设法从原方程组 (3) 经过适当的运算，重新组成一个“部分”的全微分方

程

$$\mathrm{d}\psi(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \tag{8}$$

从而得到(3)的一个通积分 $\psi(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)=C$，其中 C 为任意常数，也称之为首次积分。从这个意义上讲，(8)仅是(3)的部分的等价方程。这里"部分"的含义是指(8)的解仅给出了未知函数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个关系式，即(3)的解应该满足的一个关系式。显然，得到了上述形式的一个首次积分，也就可以消去(3)中一个未知函数，这样方程的个数就减少了，也达到了方程组"降阶"的目的。

现在先给出首次积分的严格数学定义。假设函数 $\psi(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在区域 D 内有一阶连续偏导数，它不恒为常数，如果将方程组(3)的任一解 $x_i=\varphi_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 代入后得到的 $t\in(\alpha,\beta)$ 的函数恒为常数，则称

$$\psi(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)=C$$

为(3)的一个首次积分，这里 C 为任意常数。有时也称函数 $\psi(t,x_1,\cdots,x_n)$ 为方程组(3)的首次积分。

由这个定义可知方程组(3)的首次积分可以有无穷多个。因为，若 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k$ 是方程组(3)的 k 个首次积分，则任何连续可微函数 $\Phi(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k)$ 也是方程组(3)的首次积分。

例3 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t}{y}, & (9)_1\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t}{x}. & (9)_2\end{cases}$$

解 式$(9)_1$两端分别除以式$(9)_2$两端得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x}{y}$，可求得一个首次积分 $\dfrac{x}{y}=C_1$。将它代入$(9)_2$可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t}{C_1y}$，积分上式得 $C_1y^2-t^2=C_2$。于是

$$xy-t^2=C_2$$

是又一个首次积分。故

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=C_1,\\ xy-t^2=C_2\end{cases}$$

就是方程组 $(9)_1$，$(9)_2$ 的通积分。易见，从这个通积分可以直接解出 x，y 为 t,C_1,C_2 的函数。

例 4 求解下述对称形式的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(y^2-z^2)}=\frac{\mathrm{d}y}{-y(z^2+x^2)}=\frac{\mathrm{d}z}{z(x^2+y^2)}. \tag{10}$$

解 将(10)化为

$$\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2(y^2-z^2)}=\frac{y\,\mathrm{d}y}{-y^2(z^2+x^2)}=\frac{z\,\mathrm{d}z}{z^2(x^2+y^2)},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{2x^2(y^2-z^2)}=\frac{\mathrm{d}y^2}{-2y^2(z^2+x^2)}=\frac{\mathrm{d}z^2}{2z^2(x^2+y^2)}.$$

考虑到

$$\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{-2(x^2+y^2)z^2}=\frac{\mathrm{d}z^2}{2z^2(x^2+y^2)},\ \text{可得}$$

$$-\mathrm{d}(x^2+y^2)=\mathrm{d}z^2,$$

即得 $\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)=0$。故有一个首次积分为

$$x^2+y^2+z^2=C_1.$$

再考虑到

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{-2y^2(C_1-y^2)}=\frac{\mathrm{d}z^2}{-2z^2(C_1-z^2)},$$

令 $u=y^2$，$v=z^2$，即得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(C_1-u)}+\frac{\mathrm{d}v}{v(C_1-v)}=0,$$

即

$$\mathrm{d}\ln\left|\frac{u}{C_1-u}\right|+\mathrm{d}\ln\left|\frac{v}{C_1-v}\right|=0;$$

积分之，得

$$\frac{uv}{(C_1-u)(C_1-v)}=C_2.$$

这样就有另一个首次积分

$$y^2z^2 = C_2(C_1 - y^2)(C_1 - z^2).$$

故有(10)的通积分

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1, \\ y^2z^2/(x^2 + y^2)(x^2 + z^2) = C_2. \end{cases}$$

上面两个例子中，我们在求得了两个首次积分以后，就认为方程组的求解问题已解决了．这里自然要提出如下两个问题：一是究竟要求出多少个首次积分才算求得了方程组的通积分？二是如何求首次积分？

关于第一个问题，我们不加证明地叙述下面的定理．

定理 假若 $\psi_j(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)(j=1,2,\cdots,n)$ 是方程组(3)的 n 个互相独立的首次积分，即

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ & \cdots\cdots & & \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{11}$$

那末，由下面几个关系式

$$\psi_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n) = C_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{12}$$

确定的隐函数组

$$x_j = \varphi_j(t,C_1,C_2,\cdots,C_n) \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

就是方程组(3)的解或通积分，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 n 个任意常数．

关于第二个问题，一般地可将方程组写成对称的形式：

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,\cdots,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t,x_1,\cdots,x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(t,x_1,\cdots,x_n)} = dt$$

或更对称的形式

$$\frac{dx_1}{X_1(t,x_1,\cdots,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(t,x_1,\cdots,x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(t,x_1,\cdots,x_n)} = \frac{dt}{X_0(t,x_1,\cdots,x_n)},$$

其中 $X_i = f_i X_i (i=1,2,\cdots,n)$。然后，利用比例的性质凑成全微分方程，通过积分去求解而得到首次积分。求得了一个首次积分以后，就可以从中解出某个未知函数，然后从方程组(3)中消去一个未知函数，使之减少一个方程，再继续求首次积分或求解已“降阶”了的方程组。

习　题

1. 求解下列方程组：

① $y' = \dfrac{x}{z}$，$z' = -\dfrac{x}{y}$；

② $y' = \dfrac{y^2}{z-x}$，$z' = y+1$；

③ $y' = \dfrac{z}{x}$，$z' = \dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$；

④ $y' = y^2 z$，$z' = \dfrac{z}{x} - yz^2$；

⑤ $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{x+z} = \dfrac{dz}{x+y}$；

⑥ $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{x+y+z} = \dfrac{dz}{x-y}$；

⑦ $\dfrac{dx}{z^2-y^2} = \dfrac{dy}{z} = -\dfrac{dz}{y}$；

⑧ $\dfrac{dx}{x(y+z)} = \dfrac{dy}{z(z-y)} = \dfrac{dz}{y(y-z)}$；

⑨ $\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{xy-2z^2} = \dfrac{dz}{xz}$；

⑩ $\dfrac{dx}{x(y^2-z^2)} = -\dfrac{dy}{y(z^2+x^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2+y^2)}$；

⑪ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + xf'(t) - yg'(t) = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + xg'(t) + yf'(t) = 0. \end{cases}$

⑫ $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\cos\ln(t+1)+y\sin\ln(t+1);\\ \dfrac{dy}{dt}=x\sin\ln(t+1)+y\cos\ln(t+1)\end{cases}$

2. 试求满足下面两个条件的两条平行曲线：(1) 在这两条曲线上有相同横坐标的一对点处所引的切线交在纵轴上，所引的法线needs交于横轴上；(2) 其中一条曲线经过点(1,1)，另一条曲线经过点(1,2)。

3. 质量为 m 的一物体自高度 h 处下落，设阻力与物体的速度成正比，而物体下落的初速度为 v_0，方向与水平线成倾角 α，试求物体运动的轨道。

§5 初值问题解的存在唯一性

在一般情况下，我们无法得到初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

的解的解析表达式，但是，在实际问题中，我们往往关心初值问题究竟有没有解？这是解的存在性问题。要是知道初值问题(1)的解确实存在，就可以用数值方法作近似计算，得到它的数值解。随之而来的另一个问题是，初值问题的解是否唯一？在解唯一的前提下，我们可以放心地进行计算，如果解不止一个，那末有可能"漏掉"所需要的解。因此，我们希望知道如何判别初值问题解的存在唯一性。

一、解的局部存在性定理

在此我们介绍一个应用比较广泛的存在唯一性定理。

定理 1 设：(i) $f(t,x)$ 在闭区域 $\overline{D}=\{(t,x)\,|\,|t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$ 上连续；(ii) $f(t,x)$ 在区域 $\overline{D}$ 上关于 x 满足李普希兹条件，即对于一切 (t,x_1)、$(t,x_2)\in\overline{D}$，成立

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|,$$

其中 $L>0$ 是常数，则初值问题(1)的解在区间 $[t_0-h,t_0+h]$ 上存在且唯一。其中

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),\ M=\max_{(t,x)\in\overline{D}}|f(t,x)|.$$

证 与第三章对线性方程组解的存在唯一性的证明一样，仍用毕卡逐次逼近法，分为几步。

第一步，求初值问题(1)的连续可微解 $x(t)(\alpha<t<\beta)$，这等价于求积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\mathrm{d}s \tag{3}$$

的连续解 $x(t)(\alpha<t<\beta)$。

事实上，如果 $x=\varphi(t)\in C^1(\alpha,\beta)$，且是初值问题(1)的解，则对方程

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,\varphi(t)),\ \alpha<t<\beta$$

两端积分并注意到初值条件 $\varphi(t_0)=x_0$，就得到

$$\varphi(t)-x_0=\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s,\alpha<t<\beta,$$

即 $\varphi(t)$ 满足积分方程(3)。 反之，若 $\varphi(t)$ 是积分方程(3)的解，则显然 $\varphi(t)$ 是连续可微的，有 $\varphi(t_0)=x_0$，且在 (3) 两边对 t 求导后，得 $\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,\varphi(t))$，即 $\varphi(t)$ 是初值问题(1)的解。

第二步，作逐次迭代的函数序列$\{\varphi_n(t)\}$：

$$\varphi_0(t)\equiv x_0\ (\text{第零次近似}),$$

$$\varphi_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$(\text{第 } n \text{ 次近似}).$$

第三步，证明：(i) $\{\varphi_n(t)\}$ 在区间 $[t_0-h,t_0+h]$ 上有定义、连续；(ii) 当 $n\to\infty$ 时，$\varphi_n(t)$ 在 $[t_0-h,t_0+h]$ 上一致收敛。

用数学归纳法。设 $t\in[t_0-h,t_0+h]$，对于 $n=1$，有

$$|\varphi_1(t)-x_0|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(s,x_0)|\mathrm{d}s\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b,$$

因此，$(t,\varphi_1(t))\in\overline{D}$，由于 $f(s,x_0)$ 连续，得到 $\varphi_1(t)$ 在 $[t_0-h,t_0+h]$

上也连续。假定 $(t,\varphi_k(t))\in\overline{D}$，$\varphi_k(t)$ 连续，则

$$|\varphi_{k+1}(t)-x_0|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_k(s))|\mathrm{d}s\leqslant Mh\leqslant b,$$

即 $(t,\ \varphi_{k+1}(t))\in\overline{D}$，由于 $f(t,x)$ 在 D 上连续，$\varphi_k(t)$ 连续，得到 $\varphi_{k+1}(t)$在$[t_0-h,t_0+h]$上也连续。

考察级数

$$\varphi_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)].$$

可以用归纳法证明：

$$|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\leqslant\frac{ML^{n-1}|t-t_0|^n}{n!}\quad(n\in Z,|t-t_0|\leqslant h).\tag{4}$$

事实上，当 $n=1$ 时，有

$$|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_0(s))|\mathrm{d}s\leqslant M|t-t_0|.$$

现假定当 $n=k$ 时，(4)式成立：

$$|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)|\leqslant\frac{ML^{k-1}}{k!}|t-t_0|^k,$$

那末，就有

$$\begin{aligned}|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)|&=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_k(s))-f(s,\varphi_{k-1}(s))\mathrm{d}s\right|\\&\leqslant L\int_{t_0}^{t}|\varphi_k(s)-\varphi_{k-1}(s)|\mathrm{d}s\\&\leqslant L\int_{t_0}^{t}\frac{ML^{k-1}}{k!}|s-t_0|^k\mathrm{d}s\\&=\frac{ML^k}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1}.\end{aligned}$$

由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{MN^{n-1}h^n}{n!}$$

收敛，根据魏尔斯特拉斯判别法，函数项级数

$$\varphi_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]$$

在区间$[t_0-h,t_0+h]$上一致收敛。设 $\varphi_n(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h$ 上一致收敛于 $\varphi(t)$，根据 $\varphi_n(t)$ 在$[t_0-h,t_0+h]$上连续，得到 $\varphi(t)$ 在$[t_0-h,t_0+h]$上也连续。又由于

$$|f(t,\varphi_n(t))-f(t,\varphi(t))|\leqslant L|\varphi_n(t)-\varphi(t)|,$$

根据函数 $f(t,x)$ 的连续性，得到下式一致地成立：

$$f(t,\varphi_n(t))\to f(t,\varphi(t))(n\to\infty,|t-t_0|\leqslant h),$$

因而，当 $n\to\infty$ 时，极限号与积分号可变换，即有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_n(s))\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t}\lim_{n\to\infty}f(s,\varphi_n(s))\mathrm{d}s$$

$$=\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s.$$

从而得

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s,\ |t-t_0|\leqslant h.$$

所以，初值问题(1)的解在$[t_0-h,t_0+h]$上存在。

第四步，证明初值问题解的唯一性。我们先证明一个十分有用的不等式，通常称为格朗瓦尔（Gronwall）不等式。

引理 设 $m,v\in C([t_0,t_0+h],\ R^+)$，这里 $C([t_0,t_0+h],\ R^+)$表示区间 $[t_0,t_0+h]$上正值连续函数全体，$R^+=[0,\infty)$，$k\geqslant 0$。

且 $m(t)\leqslant k+\int_{t_0}^{t}v(s)m(s)\mathrm{d}s,\ t\in[t_0,t_0+h]$，

则
$$m(t)\leqslant k\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s},\ t\in[t_0,t_0+h].\tag{5}$$

可分两种可能情形来证这一引理。

(i) 若 $k>0$，则

$$\frac{m(t)v(t)}{k+\int_{t_0}^{t}v(s)m(s)\,\mathrm{d}s}\leqslant v(t),$$

从 t_0 到 t 积分，得到

$$\ln\left[k+\int_{t_0}^{t}m(s)v(s)\mathrm{d}s\right]-\ln k\leqslant\int_{t_0}^{t}v(s)\mathrm{d}s,$$

所以

$$m(t)\leqslant k+\int_{t_0}^{t} v(s)m(s)\,\mathrm{d}s\leqslant k\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s}.$$

(ii) 若 $k=0$，取 $k_n>0$，$k_n\to 0(n\to\infty)$，则

$$m(t)\leqslant k_n+\int_{t_0}^{t} m(s)v(s)\mathrm{d}s,$$

根据(i)得到

$$m(t)\leqslant k_n\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}s},$$

令 $n\to\infty$，得到 $m(t)\equiv 0$。

现利用不等式(5)证明定理 1 中的唯一性部分。

设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是初值问题 (1) 的两个解 ($t\in[t_0-h,t_0+h]$)，则有恒等式

$$x_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_1(s))\mathrm{d}s,$$

$$x_2(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_2(s))\mathrm{d}s,$$

把上列两式相减，利用 $f(t,x)$ 满足李普希兹条件的假设，得

$$|x_1(t)-x_2(t)|\leqslant L\int_{t_0}^{t} |x_1(s)-x_2(s)|\mathrm{d}s,$$

根据格朗瓦尔不等式(5)，当 $t\in[t_0,t_0+h]$时，有

$$|x_1(t)-x_2(t)|\equiv 0.$$

当 $t_0-h\leqslant t\leqslant t_0$ 时，置

$$\tilde{x}_1(t)=x_1(-t),\quad \tilde{x}_2(t)=x_2(-t),\quad t_0^*=-t_0,$$

则有

$$\tilde{x}_1(t)=x_0-\int_{t^*_0}^{t} f(-s,\tilde{x}_1(s))\mathrm{d}s,$$

$$\tilde{x}_2(t)=x_0-\int_{t^*_0}^{t} f(-s,\tilde{x}_2(s))\mathrm{d}s. \qquad t_0^*\leqslant t\leqslant t_0^*+h.$$

从前面的讨论，得到

$$|x_1(-t)-x_2(-t)|\equiv 0,\quad -t_0\leqslant t\leqslant -t_0+h,$$

即
$$x_1(t)\equiv x_2(t),\quad t_0-h\leqslant t\leqslant t_0.$$

上面是对 $x\in R^1$ 的情形证明定理 1 的。这一定理对 $x\in R^n$ 同样成立，李普希兹的条件的叙述也完全一样，但1.1表示 R^n 中的范数。

定理 1 给出了在李普希兹条件下的存在唯一性定理。那末，对于给定的函数 $f(t,x)$，如何判别它满足或不满足李普希兹条件呢？下面我们给出两个实用的判别法：

1° 如果 $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 在凸闭区域 D 上连续，则函数 $f(t,x)$ 在 D 上关于 x 满足李普希兹条件。

2° 如果当 $x\neq x_0$ 时，$\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 存在，且

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|=+\infty,$$

则在含有(t_0,x_0)的任何区域上，$f(t,x)$ 关于 x 不满足李普希兹条件。

事实上，在 1° 的情况下，因为 $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 在关于x为凸的闭区域 D 上连续，所以存在 $L>0$，使得

$$\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|\leqslant L,\quad (t,x)\in D.$$

设(t,x_1)、$(t,x_2)\in D$，根据拉格朗日(Lagrange)微分中值定理，得到

$$f(t,x_1)-f(t,x_2)=\frac{\partial f(t,x_2+\theta(x_1-x_2))}{\partial x}(x_1-x_2),$$

其中 $0<\theta<1$，从而

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant\left|\frac{\partial f(t,x_2+\theta(x_1-x_2))}{\partial x}\right|\cdot|x_1-x_2|$$

$$\leqslant L|x_1-x_2|.$$

在 2° 的情况下，假定函数 $f(t,x)$ 在含有 (t_0,x_0) 的某个区域 U 上，关于 x 满足李普希兹条件，则当 $(t,x)\in U,h>0$ 充分小时，$(t,x+h)\in U$，且有

$$|f(t,x+h)-f(t,x)|\leqslant Lh.$$

令 $h\to 0$，得到$\left|\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|\leqslant L$，令 $x\to x_0$，得

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| \leqslant L,$$

得到矛盾。

例 1 设 a,b 为常数，n 为自然数。试对于 n 的不同的值，讨论微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = t + a \sin^2 x$$

有多少个满足条件 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=b$ 的解？

解 1° 当 $n=1$ 时，由于 $f(t, x)=t+a\sin^2 x$ 在全平面上连续，且关于 x 满足李普希兹条件，根据定理 1，存在唯一的满足初值条件 $x(0)=x_0$ 的解 $x(t)$，这个解在 $t=0$ 的导数根据方程应为 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=$ $\left. t+a\sin^2 x\right|_{t=0,x=x_0}=a\sin^2 x_0$。因此，如果 $b\neq a\sin^2 x_0$，则问题无解。

2° 当 $n=2$ 时，原方程可化为方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=t+a\sin^2 x.$$

这时 $f(t,x,y)=\begin{pmatrix} y \\ t+a\sin^2 x \end{pmatrix}$，$\frac{\partial f(t,x,y)}{\partial(x,y)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a\sin 2x & 0 \end{pmatrix}$ 关于 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 满足李普希兹条件，所以对初值 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=b$ 有唯一解。

3° 当 $n\geqslant 3$ 时，原方程可化为 R^3 中的方程组，同样可说明它满足定理 1 的条件，而由于 $\ddot{x}(0)$ 的任意性，满足要求 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=b$ 的解有无穷多个。从定理 1 的证明过程可以看出，李普希兹条件主要保证了解的唯一性。那末，为了保证初值问题解的存在性，是否一定要施加李普希兹条件呢？下面给出的皮亚诺(Peano)定理，是在较弱条件下的一个应用较广泛的存在定理，该定理的证明较复杂，本书就省略了。

定理 2 设函数 $f(t,x)$ 在区域 $\bar{D}=\{(t,x)\mid |t-t_0|\leqslant a, |x-x_0|\leqslant b\}$上连续，则初值问题(1)的解在区间$[t_0-h,t_0+h]$上存在。其中

$$h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right),\ M=\max_{(t,x)\in\bar{D}}|f(t,x)|.$$

二、解的整体存在性定理

上一节我们介绍的初值问题解的存在唯一性定理，实际上只是一个局部性的存在定理，因为它们只涉及到解在小区间$[t_0-h,t_0+h]$上的存在性。在实际应用中，人们感兴趣的是这个解能否扩展到更大的区间上？对于线性方程组，这是能够做到的，只要 $A(t)$ 与 $f(t)$ 在(α,β)上连续，那末线性方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t),\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

的解也在区间(α,β)上存在. 对于非线性方程，下面我们概述一些常用的关于解的整体存在性的结果。

一般地，若$x(t)$在(α,β)上是初值问题(1)的解，$y(t)$在(γ,δ)上也是(1)的解，若$\gamma<\alpha$，$\delta>\beta$，即$(\alpha,\beta)\subset(\gamma,\delta)$，并且在区间$(\alpha,\beta)$上，$x(t)\equiv y(t)$，则称解 $y(t)$ 是解 $x(t)$ 的延展。若 $x(t)$ 是在区间(α,β)上定义的解，且这个存在区间(α,β)不能再延展，则称$x(t)$是(α,β)上的不可延拓解，或简称为饱和解，而(α,β)是解的最大存在区间。显然，解的最大存在区间必为开区间。

下面，我们先不加证明地叙述饱和解的端点的两个重要性质，由此可以得到解的整体存在性的结果。

性质 1 设函数 $f(t,x)$ 在有界区域 D 上连续，且在 D 的任何有界闭子域上关于 x 满足李普希兹条件。若 $x(t)$ 是方程(1)的饱和解，(α,β)是其最大存在区间。则

1° 对于任何内闭区域 $\bar{D}_1\subset D$，存在$\delta>0$，使得当$t\in(\beta-\delta,\beta)$或$(\alpha,\alpha+\delta)$时，$(t,x(t))\notin\bar{D}_1$(见图 5.3)；

2° 设 $\rho(t)=\mathrm{dis}((t,x(t)),\partial D)$，其中$\partial D$为 D 的边界，那末

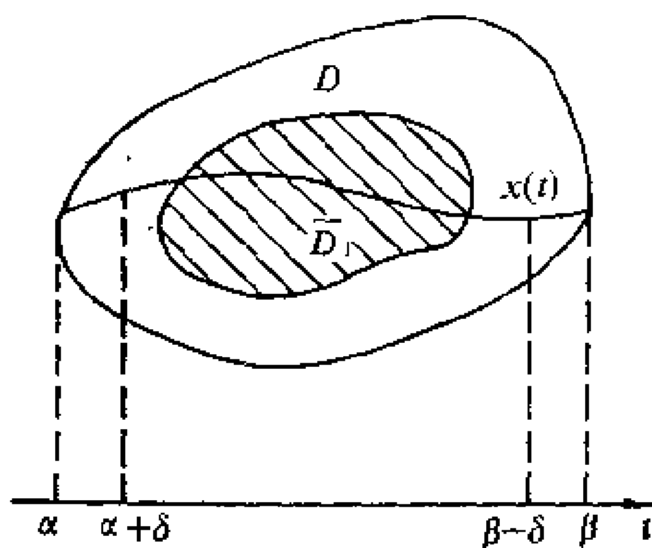


图 5.3

$$\lim_{t\to\beta-0}\rho(t)=0,\ \lim_{t\to\alpha+0}\rho(t)=0.$$

性质 2 若 $f(t,x)$ 在无界区域 D 上连续，且在 D 的任何有界闭子域上关于 x 满足李普希兹条件。设 $x(t)$ 是饱和解，(α,β) 是最大存在区间，则 β 必为下列情形之一：

1° $\beta=+\infty$；

2° $\beta<+\infty$，当 $t\to\beta-0$ 时，$x(t)$ 无界；

3° $\beta<+\infty$，$\lim\limits_{t\to\beta-0}\mathrm{dist}((t,x(t)),\partial D)=0$。

类似地，可以得到 α 处的结果。

现在，我们介绍几个解的整体存在性的结果。

定理 3 设 $f(t,x)$ 在整个 (t,x) 平面上连续有界，且 $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ 连续，则微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$$

的每一个解的最大存在区间是 $(-\infty,+\infty)$。

证 用反证法。假定某个解 $\varphi(t)$ 的最大存在区间为 (α,β)，其中 $\beta<+\infty$。设 $|f(t,x)|\leqslant M$。

根据饱和解的端点性质 2，得到

$$\lim_{t\to\beta-0}|\varphi(t)|=+\infty.$$

另一方面，有

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s,$$

从而

$|\varphi(t)-x_0|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(s,\ \varphi(s))|\mathrm{d}s\leqslant M|t-t_0|\leqslant M|\beta-t_0|$，这与 $\lim\limits_{t\to\beta-0}|\varphi(t)|=+\infty$ 矛盾。因此，$\beta=+\infty$，同理可证 $\alpha=-\infty$。

定理 4 设 $D=\{(t,\ x)|a<t<b,-\infty<x<+\infty\}$。设 $f(t,x)$ 在区域 D 上连续并满足解的唯一性条件，且当 $(t,x)\in D$ 时，有

$$|f(t,x)|\leqslant g(|x|),$$

其中 $g(r)$ 满足：

1° 当 $r\geqslant 0$ 时连续，当 $r>0$ 时 $g(r)>0$；

2° $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{g(r)}=+\infty(a>0)$。

则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$ 的一切解在 (a,b) 上存在。

证 设 $x(t)$ 在 (α,β) 上是饱和解，假定 $\beta<b$，则根据性质 2，得到

$$\lim_{t\to\beta-0}|x(t)|=+\infty.$$

因此存在 $\delta>0$，使得当 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 时，$|x(t)|>0$。

当 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 时，$\frac{\mathrm{d}|x(t)|}{\mathrm{d}t}\leqslant g(|x(t)|)$，由此得到

$$\int_{\beta-\delta}^{t}\frac{\mathrm{d}|x(t)|}{g(|x(t)|)}\leqslant\int_{\beta-\delta}^{t}\mathrm{d}t<\delta\ .$$

置 $r=|x(t)|$，则 $\int_{|x(\beta-\delta)|}^{|x(t)|}\frac{\mathrm{d}r}{g(r)}<\delta$，令 $t\to\beta-0$，这与 $\int_{|x(\beta-\delta)|}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{g(r)}=+\infty$ 矛盾。

习　题

1. 对于微分方程

$$\frac{dx}{dt}=t+\sin x+f(x)$$

叙述并用逐次逼近法证明初值问题的解的存在唯一性定理.

2. 在(t,x)平面上,下列微分方程的两个解的图形能够在某一点(t_0, x_0)彼此相切吗? 为什么?

(1) $\frac{dx}{dt}=t+\sin x$;　　　(2) $\frac{d^2x}{dt^2}=t+\sin x$;

(3) $\frac{d^3x}{dt^3}=t+\sin x$.

3. 设$D=\{(t,x)\mid a<t<b,\ |x|<+\infty\}$. 设$f(t,x)$在区域$D$上连续, 且$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$在$D$上连续,

$$|f(tx)|\leqslant p(t)|x|+q(t),\ ((t,x)\in D)$$

其中$p(t)$和$q(t)$在(a,b)上连续、非负. 试证微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

的一切解在(a,b)上存在.

(**提示**: 用反证法及格朗瓦尔不等式.)

4. 设函数$f(t)$, $g(x)$分别在$0\leqslant t<+\infty$和$0<x<+\infty$上是正的连续函数,且$g(x)$满足:对于任何$A>0$,

$$\lim_{B\to\infty}\int_A^B\frac{dx}{g(x)}=+\infty.$$

试证当$t_0\geqslant 0$, $x_0>0$时,初值问题

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t)g(x),\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

的解在$[t_0,+\infty)$上存在.

(**提示**: 用反证法,饱和解的端点性质2及格朗瓦尔不等式.)

5. 设$f(t,x)$和$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$在全平面上是连续的, 且

$$|f(t,x)| \leqslant A + B|x|,$$

其中 $A>0$，$B>0$ 是常数．试证微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x)$$

的任一解 $\varphi(t)$ 的最大存在区间是$(-\infty, +\infty)$。

（**提示**：用反证法，饱和解的端点性质 2 及格朗瓦尔不等式。）

第六章　非线性系统模型及应用

§1　含有铁芯线圈的非线性谐振回路

本节研究非线性系统，这种系统含有一个或一个以上的非线性元件(例如有铁芯的线圈、电子管、晶体管等)，系统的振动规律要用非线性方程来表征．

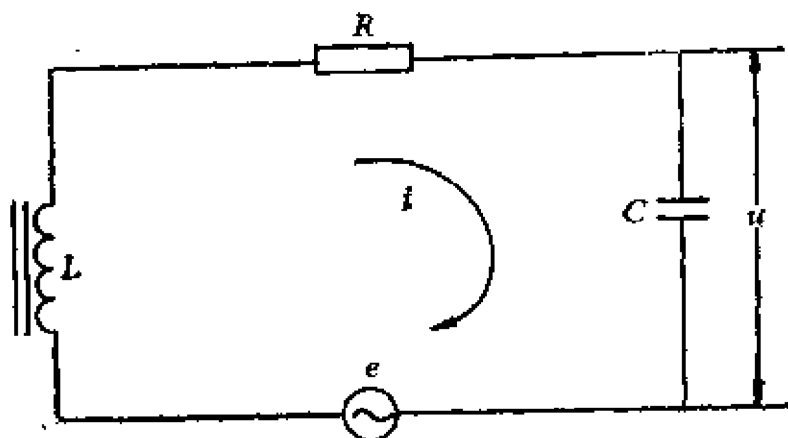


图 6.1

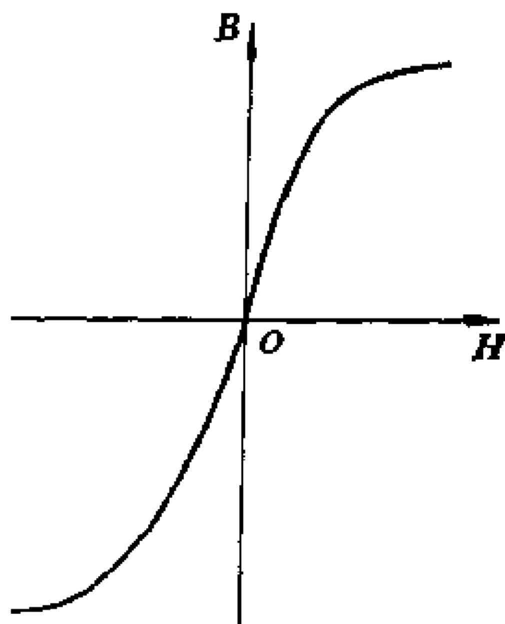


图 6.2

考虑如图 6.1 所示的含有铁芯线圈的非线性谐振回路，它与通常的线性谐振回路相比，有一系列不同的特点．这些特点是由铁芯的磁感应B与磁场强度H之间的非线性特性决定的．软磁材料的典型B-H曲线如图 6.2 所示（假设磁化电流的振幅足够小，略而不计磁滞现象)，它可用下列三次多项式来近似：

$$B=\mu H-\beta H^{3}, \tag{1}$$

其中 μ 与 β 均为正常数。

为了建立这个系统的数学模型——二阶非线性方程，我们取自变量为时间 t，回路中电容 C 两端的电压降 $u(t)$ 为未知函数。假设回路中接入简谐电动势

$e=E_0\sin pt$，则回路方程式有

$$u+Ri+\frac{\mathrm{d}\phi(i)}{\mathrm{d}t}=E_0\sin pt, \tag{2}$$

其中 $\phi(i)$ 为磁通量，它与磁感应 B 成正比，磁场强度 H 与磁化电流 i 成正比，故有

$$\phi(i)=L_0 i-L_3 i^3. \tag{3}$$

又 $i=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，故有

$$\phi=L_0C\dot{u}-L_3C^3\dot{u}^3,$$

$$\dot{\phi}=L_0C\ddot{u}-3L_3C^3\dot{u}^2\ddot{u}.$$

将之代入方程 (2) 得

$$u+RC\dot{u}+L_0C\ddot{u}-3L_3C^3\dot{u}^2\ddot{u}=E_0\sin pt, \tag{4}$$

或改写为

$$\ddot{u}+\omega_0^2u+\omega_0\delta\dot{u}-\frac{\gamma}{\omega_0^2}\dot{u}^2\ddot{u}=\omega_0^2E_0\sin pt, \tag{5}$$

其中 $\omega_0^2=\frac{1}{L_0C}$，$\delta=\frac{R}{\omega_0L_0}$（回路衰减系数），$\gamma=3\frac{L_3C}{L_0^3}$。

假定回路衰减系数 δ 与外电动势振幅 E_0 足够小。设 $\tau=pt$，并假定 $\omega_0\approx p$，则 (5) 变为

$$\ddot{u}+u=hu-\delta\dot{u}+\gamma\dot{u}^2\ddot{u}+E_0\sin\tau, \tag{6}$$

其中 $h=(p^2-\omega_0^2)/p^2$ 为相对失谐。注意 (6) 中自变量为 τ，未知函数为 $u(\tau)$。将 (6) 式改写为

$$\ddot{u}+u=hu-\delta\dot{u}+\gamma\dot{u}^2(-u+hu-\delta\dot{u}+\gamma\dot{u}^2\ddot{u}+E_0\sin\tau)+E_0\sin\tau,$$

注意到 h,δ,E_0 足够小，略去小次及高阶次得

$$\ddot{u}+u=hu-\delta\dot{u}-\gamma\dot{u}^2u+E_0\sin\tau. \tag{7}$$

令方程 (7) 的解具如下的形式

$$u=A\cos(\tau-\theta),\tag{8}$$

其中A与θ是τ的缓变函数的振幅与相位。置$\alpha=\tau-\theta$，将$u=A\cos\alpha,\dot{u}=-A\sin\alpha,\tau=\alpha+\theta$,代入(7)的右端得(记(7)的右端为$F$)，

$$F=hA\cos\alpha+\delta A\sin\alpha-\gamma A^3\sin^2\alpha\cos\alpha+E_0\sin\tau$$
$$=\left[hA-\frac{1}{4}\gamma A^3+E_0\sin\theta\right]\cos\alpha+[\delta A+E_0\cos\theta]\sin\alpha+\cdots.$$

我们采用了近似方法，即取$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}$与$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}$较小，注意到

$$u\doteq A\cos\alpha,\ \dot{u}=-A\sin\alpha,\ \ddot{u}=-A\cos\alpha+F,$$

易知有

$$\dot{u}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}\cos\alpha-A\sin\alpha\left[1-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right]$$

及
$$\ddot{u}=-\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}\sin\alpha-A\cos\alpha\left[1-\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta}\right],$$

从而可得

$$\begin{cases}\cos(\tau-\theta)\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}+A\sin(\tau-\theta)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=0, & (9)\\ -\sin(\tau-\theta)\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}+A\cos(\tau-\theta)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=F. & (10)\end{cases}$$

解之得

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}=-F\cdot\sin(\tau-\theta),\tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{A}F\cos(\tau-\theta).\tag{12}$$

将(11)与(12)的左边作傅里叶级数展开，并取其第一项，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}=-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}F\cdot\sin\alpha\mathrm{d}\alpha=-\dfrac{1}{2}[\delta A+E_0\cos\theta], & (13)\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{1}{2\pi A}\displaystyle\int_0^{2\pi}F\cos\alpha\mathrm{d}\alpha \\ \qquad=\dfrac{1}{2A}\left[hA-\dfrac{1}{4}\gamma A^3+E_0\sin\theta\right] & (14)\end{cases}$$

特别地令 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}=0, \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=0$，则此时定常状态的 A, θ 由下列方程组决定

$$\begin{cases} \delta A + E_0 \cos\theta = 0, & (15) \\ hA - \frac{1}{4}\gamma A^3 + E_0 \sin\theta = 0. & (16) \end{cases}$$

消去 θ 可得出振幅 A 和失谐量 h 之间的关系

$$hA - \frac{1}{4}\gamma A^3 \pm E_0\sqrt{1-\delta^2\left(\frac{A}{E_0}\right)^2} = 0. \tag{17}$$

我们不打算再详细讨论 A 与 h 的关系或相对振幅 A/E_0 关于 h 的变化规律，而来看一个特殊的又很能说明问题的情形：设 $\delta=0, E_0=0$，则由(15)，(16)可得

$$h = \frac{1}{4}\gamma A^2. \tag{18}$$

又 $h=(\omega_F^2-\omega_0^2)/\omega_F^2 \approx 2(\omega_F-\omega_0)/\omega_F \ (\omega_F \approx \omega_0)$，其中 ω_F 为非线性保守回路的自由振荡频率(固有频率)。所以由(18)式解得

$$\omega_F \approx \frac{\omega_0}{1-\frac{1}{8}\gamma A^2} \approx \left(1+\frac{1}{8}\gamma A^2\right)\omega_0. \tag{19}$$

上式说明，在非线性保守回路中的自由振荡频率与振荡的振幅有关，它已失去了线性系统中的振荡等时性这一典型特性.

在本节中我们采用的讨论方法是一种近似分析的方法，称为缓变振幅法。它一开始就假定系统中的定常振荡是正弦波或余弦波，然后在最粗略的零阶近似情形下决定振荡的振幅，这样的近似可以提供我们一些粗略的低次谐波的分析。当然如果要考虑高次谐波的含量，以便确定更高阶的频率修正项，则可以用小参数法来求解。

§2 两 体 问 题

天体运动中的两体问题是历史上一个著名的问题，牛顿早在发明

微积分的同时，就研究了两体问题。在开普勒(Kepler)关于行星绕太阳运转的三定律的基础上，牛顿建立了万有引力定律。

开普勒三定律是：

第一定律：行星沿椭圆轨道绕太阳运转，太阳位于椭圆的一个焦点上。

第二定律：从太阳到行星的向量在单位时间内扫过的面积是常数。

第三定律：行星绕太阳运转周期的平方与椭圆轨道的长半轴的立方成正比。

牛顿万有引力定律是：两个天体之间具有吸引力，吸引力与两个天体的距离平方成反比，而与它们的质量乘积成正比，即

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

其中 m 和 M 是两个天体的质量，r 是两个天体之间的距离，$\boldsymbol{r}$ 是从恒星到行星的向量，G 是比例系数。称为万有引力常数。

本节介绍如何从万有引力定律出发建立非线性常微分方程组，又从求解该方程组推出开普勒三定律。

假设太阳是静止的，它的质量为 M，某行星的质量为 m，由于太阳系中除太阳外所有行星的总质量远小于 M，所以我们可以忽略别的行星的作用。现把坐标系的原点取在太阳上，这就构成一惯性坐标系。根据牛顿第二定律和万有引力定律，可建立行星的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GmM}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{1}$$

如果考虑到行星 m 对太阳 M 的引力使太阳作加速运动，那末行星的运动方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{G(m+M)}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{2}$$

但在 m 较 M 很小时，可以用(1)代替(2)。记 $\mu=G(m+M)$，x,y 和 z 表示行星的相对坐标，(2)就可写成如下形式的非线性方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}&=-\frac{\mu x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}&=-\frac{\mu y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}&=-\frac{\mu z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}\tag{3}$$

求解这种高阶非线性方程组常用首次积分法，在本例中这些首次积分是有具体的力学意义的，也就是开普勒三定律的数学形式的描述。

注意到 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$，所以有

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\mathbf{0},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\mathbf{0},$$

从而

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{C}\ (\text{常向量})。$$

这表明行星运行轨道位于过太阳的一个平面中。事实上，用 z 乘(3)的第二式，用 y 乘(3)的第三式，两式相减，得到

$$z\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)=0,$$

即

$$z\dot{y}-y\dot{z}=A(\text{常数})。\tag{4}$$

同理可得

$$x\dot{z}-z\dot{x}=B(\text{常数}),\tag{5}$$

$$y\dot{x}-x\dot{y}=C(\text{常数})。\tag{6}$$

用 x 乘(4)，y 乘(5)，z 乘(6)，然后相加得

$$Ax+By+Cz=0。$$

这就是行星运行轨道所在平面的方程。显见原点（即太阳）位于此平

面上。下面设这个平面为 (x, y) 坐标平面。那末，描述行星位置的坐标只要两个，即 x 和 y，而运动方程为

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu x}{(x^2+y^2)^{3/2}},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.\end{aligned} \tag{7}$$

下面求方程组(7)的一些首次积分，同时推导出开普勒三定律。

用 y 乘(7)的第一式，用 x 乘(7)的第二式，相加可得

$$\frac{d}{dt}(y\dot{x}-x\dot{y})=0,$$

即得(7)的一个首次积分

$$y\dot{x}-x\dot{y}=C_1, \tag{8}$$

这里 C_1 是任意常数。用 $2\dot{x}$ 乘(7)的第一式，用 $2\dot{y}$ 乘(7)的第二式，相加，得到

$$2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}=-\frac{2\mu(x\dot{x}+y\dot{y})}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

即

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=2\mu\frac{d}{dt}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

所以有(7)的另一个首次积分

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\mu(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}+C_2, \tag{9}$$

其中 C_2 是任意常数。

为讨论方便起见，引进极坐标

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

那末

$$\dot{x}=\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)\frac{d\theta}{dt},$$

$$\dot{y}=\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt}.$$

将它们代入(8)得到

$$-r^2\frac{d\theta}{dt}=C_1, \tag{10}$$

即有 $$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}C_1(\text{常数}).$$

注意在 dt 时间内向量 $\boldsymbol{r}$ 扫过的扇形面积为 $\frac{1}{2}r^2 d\theta$，故向量 $\boldsymbol{r}$ 在单位时间扫过的面积为 $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$.这样，我们就得到了开普勒第二定律。

将 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 的极坐标表达式代入(9)，得到

$$\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right\}\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+C_2.$$

注意到(10)式，就有

$$\left\{\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right\}=\frac{1}{C_1^2}\left\{C_2+\frac{2\mu}{r}\right\}.$$

置 $u=1/r$，得到

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=\frac{1}{C_1^2}(C_2+2\mu u),$$

解出 $\frac{du}{d\theta}$ 得

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{C_1}\sqrt{C_2+2\mu u-C_1^2u^2},$$

从而得到

$$d\theta=\frac{du}{\sqrt{\frac{C_2}{C_1^2}+2\frac{\mu}{C_1^2}u-u^2}}=\frac{du}{\sqrt{\frac{C_2}{C_1^2}+\frac{\mu^2}{C_1^4}-\left(u-\frac{\mu}{C_1^2}\right)^2}}. \tag{11}$$

为使上式总有意义，我们设

$$\frac{C_2}{C_1^2}+\frac{\mu^2}{C_1^4}>0.$$

积分(11)式，得到

$$\theta-\theta_0=\arcsin\left\{\left(u-\frac{\mu}{C_1^2}\right)\Big/\left(\frac{C_2}{C_1^2}+\frac{\mu^2}{C_1^4}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

其中 θ_0 为任意常数。若又记

$$p = \frac{C_1^2}{\mu}, \qquad e_1 = \left(1 + \frac{C_2 C_1^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

则可得到行星运行轨道方程

$$r = \frac{p}{1 + e_1 \sin(\theta - \theta_0)}. \tag{13}$$

当 $0 \leqslant e_1 < 1$ 时，(13)表示行星运行轨道为椭圆，且它以坐标原点为焦点。这表明太阳正好是这个椭圆的一个焦点。此时 e_1 是离心率，且椭圆的长半轴 a 与 p, e_1 的关系是

$$p = a(1 - e_1^2), \tag{14}$$

而椭圆的短半轴为 $b = a\sqrt{1 - e_1^2}$. 这个椭圆的面积为

$$\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e_1^2}. \tag{15}$$

也就是说，适当选取参数 e_1，即常数 C_1 与 C_2，就可得到开普勒第一定律。

当 $e_1 = 1$ 时，(13)是以坐标原点为焦点的抛物线。

当 $e_1 > 1$ 时，(13)是以坐标原点为焦点的双曲线的一支。

由(10)得运行周期 T 为

$$T = \pi ab \Big/ \frac{1}{2}|C_1| = 2\pi a^2 \sqrt{1 - e_1^2} \big/ |C_1|, \tag{16}$$

又由(12)与(14)得

$$C_1^2 = \mu p = \mu a(1 - e_1^2), \quad |C_1| = \mu^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - e_1^2},$$

所以
$$T = 2\pi a^{3/2} / \sqrt{\mu},$$

从而
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{G(m + M)}.$$

注意 m 与 M 之比很小，于是从上式得到

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \tag{17}$$

这表明运行周期的平方与椭圆轨道的长半轴的立方成正比。

由上述论证可知，万有引力定律包括了开普勒三定律。它反映了

行星运行的牛顿力学原理，能够解释当时对太阳系观察到的现象.

下面用类似于前面讨论的方法，建立人造卫星的轨道方程，并对之进行讨论从而给出第一、第二和第三宇宙速度.

现考虑从地球表面一点 P，沿水平夹角 α 的方向以初速 v_0 发射一颗质量为 m 的人造卫星（因为它的体积、质量比起地球是很小的，故可以把它看成一个质点）（参见图 6.3）.

过地心 O 与发射点 P 的直线方向取为 y 轴，这轴和发射人造卫星的方向所成的平面为 (x,y) 平面，在这平面上过 O 作 x 轴垂直于 y 轴，选取它的正向使发射方向落在 (x,y) 坐标系中的第一象限之内. 记 t 为时间，运动物体的坐标为 $(x(t),y(t))$，发射的时刻为 $t=0$. 由万有引力定律得运动方程

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{GmMx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\dfrac{GmMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \end{cases} \tag{18}$$

其中 G 为万有引力常数，M 为地球的质量，它们的值分别为

$$G\approx 6.672\times 10^{-23}[\text{千米}]^3/[\text{克}][\text{秒}]^2, \tag{19}$$

$$M=5.977\times 10^{27}\text{ 克}. \tag{20}$$

将方程组(18)与前面的方程组(7)比较，可知只需在(7)中取 $\mu=GM$ 即得(18)，因此用(7)的求解方法可得到人造卫星的轨道方程为

$$r=\frac{p}{1+\tilde{e}\cos(\theta-C)}, \tag{21}$$

其中 $\tilde{e}$ 即为原式(13)中的 e_1，p 不变，C 即为 $\theta_0+\pi/2$. 一些参数与任意常数的关系式为:

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=C_1,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{2GM}{(x^2+y^2)^{1/2}}+C_2,$$

$$\tilde{e}=\sqrt{1+\frac{C_2C_1^2}{G^2M^2}},\quad p=\frac{C_1^2}{GM}.$$

假定发射点是地面，即

$$x=0, y=R(\text{地球半径})=6370\text{千米},$$

也就是 $\theta=\pi/2, r=R$。由初速得

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\qquad \frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha.$$

故得 C_1 与 C_2 的数值分别为

$$\begin{aligned} C_1 &= -Rv_0\cos\alpha, \\ C_2 &= v_0^2-2GM/R. \end{aligned} \tag{22}$$

又由

$$R=\frac{p}{1+\tilde{e}\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)}=\frac{p}{1+\tilde{e}\sin C},$$

得出

$$\sin C=\left(\frac{p}{R}-1\right)\Big/\tilde{e}. \tag{23}$$

下面证明满足(23)的 C 存在，即证 $\left|\left(\frac{p}{R}-1\right)\Big/\tilde{e}\right|\leqslant 1$。注意到

$$\begin{aligned} \tilde{e}^2 &= 1+\left(v_0^2-\frac{2GM}{R}\right)R^2v_0^2\frac{\cos^2\alpha}{(GM)^2} \\ &= \left(1-\frac{Rv_0^2\cos^2\alpha}{GM}\right)^2+\frac{R^2v_0^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{(GM)^2} \\ &= \left(1-\frac{p}{R}\right)^2+\frac{p^2}{R^2}\operatorname{tg}^2\alpha\geqslant\left(\frac{p}{R}-1\right)^2, \end{aligned}$$

这就得证 C 的存在。也就是说人造卫星的轨道是完全确定的。

$\tilde{e}=0$ 时有 $p=R$，$\operatorname{tg}\alpha=0$，$\alpha=0$，$C_1=-Rv_0$，$R=C_1^2/GM=R^2v_0^2/GM$，于是

$$v_0^2=\frac{GM}{R}=\frac{6.685\times10^{-23}\times5.98\times10^{27}}{6370}=62.76$$

所以 $v_0=7.9$ 千米/秒。这就是第一宇宙速度。

$\tilde{e}=1$ 时，$C_1\neq0$，必有 $C_2=0$，即

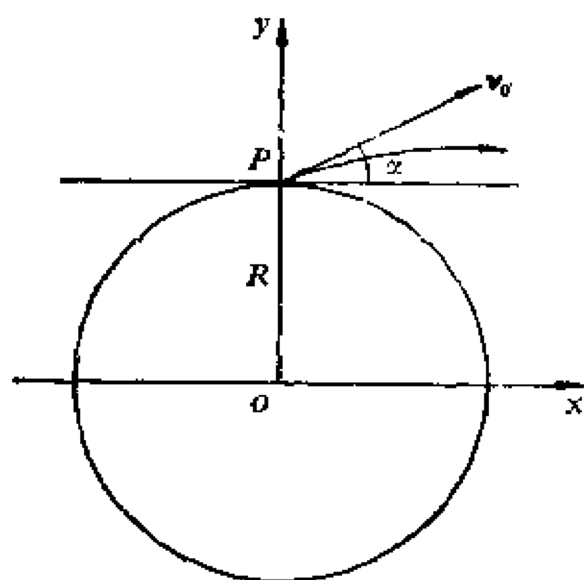


图6.3

$$v_0^2=\frac{2GM}{R},$$

它就是第一宇宙速度的$\sqrt{2}$倍，所以

$$v_0=11.2\ \text{千米/秒},$$

这是第二宇宙速度。

当$\bar{e}<1$时，即初速小于第二宇宙速度时，轨道(21)是一椭圆，它经过P点，在P点处的切线斜率是$\mathrm{tg}\,\alpha$。如果轨道上有一点与地球中心的距离小于R，则卫星便落在地球上而不能进行沿着椭圆轨道的运动，即函数

$$r=\frac{p}{1+\bar{e}\cos(\theta-c)}$$

的最小值为R(因为开始时$r=R$)。又易见此函数的最小值为$p/(1+\bar{e})$，故$R=p/(1+\bar{e})$，$\bar{e}=(p/R)-1$。但$\bar{e}^2=(p/R-1)^2+p^2\mathrm{tg}^2\alpha/R^2$，故$\alpha=0$，即仅当沿地平方向发射才有可能。

另一方面，又由$\bar{e}\geqslant 0$可知$p\geqslant R$，即$R\leqslant C_1^2/GM\leqslant R^2v_0^2/GM$，即有

$$v_0^2\geqslant\sqrt{GM/R},$$

由此说明，当初速度在第一、第二宇宙速度之间，沿地平方向发射时，才可能有沿着椭圆轨道的运动。

发射卫星的初速度达到第三宇宙速度，就可以摆脱太阳的引力。已知太阳质量为1.983×10^{33}克，太阳和地球的距离为1.495×10^{8}千米，地球绕太阳旋转的速度为29.76千米/秒。实际上只需把前面讨论第一、第二宇宙速度时的地球质量M换成太阳的质量，地球半径R换作地球离太阳的距离，即可算出要摆脱太阳引力的初速，也即相对于太阳的速度，其平方超过

$$\frac{2G\times\text{太阳质量}}{\text{地球离太阳距离}}=1,773.43=(42.11)^2.$$

又地球绕太阳的速度为 29.76 千米/秒，故地球上发射卫星的速度应超过 42.11 − 29.76 = 12.35 千米/秒。

令 v_0 是从地球上发射的初始速度，由

$$v^2 = \frac{2GM}{r} + v_0^2 - \frac{2GM}{R} > v_0^2 - \frac{2GM}{R} = v_0^2 - 125.5.$$

选取 v_0 使 $v_0^2 - 125.5 \geqslant (12.35)^2$，即 $v_0^2 \geqslant 278.1 = (16.7)^2$，就是说取 $v_0 \geqslant 16.7$ 千米/秒. 这个速度 16.7 千米/秒即为第三宇宙速度.

§3 物质流出容器的问题

化学工业中常常会遇到物质流出容器的问题. 这种流出的物质可以是液体，也可以是疏松粒状的固体. 这类问题的数学模型与处理方法相似. 在第一章第二节的模型归结中的例4提到过这个问题.下面再举几个例子.

设有直径为 1.8 米的圆柱形容器充满了水，在一定的瞬间将容器壁上两个小孔打开让水流出. 容器中水位高度为 3 米. 一个孔的位置比开始时的水面低 1.8 米，而另一孔则低 2.4 米. 流出系数为 0.61. 上孔的直径与下孔的直径分别为 50 毫米与 100 毫米. 试建立一个微分方程以确定水面降低到一定位置所需的时间 τ.

以 H 表示在时刻 τ 时容器中的水位，则水位超出上孔的高度为 $H - 1.2$（米），超出下孔的高度为 $H - 0.6$（米）（见图 6.4）.

由水力学可知，从孔中流出的水速 w 与 $\sqrt{2gh}$ 成正比，其中 g 为重力加速度，即 9.81 米/秒²，h 为高出小孔的水柱高度，这个比例常数记为 φ，称为流出系数.对于没有摩擦力和表面张力的理想液体以及理想的小孔，φ 等于 1. 但根据实验，对于普通的具有锐边的小孔，$\varphi = 0.61$. 此时有

$$w = \varphi\sqrt{2gh}. \tag{1}$$

设水从上孔流出的速度为 w_1，而从下孔流出的速度为 w_2，则有

$$\begin{aligned} w_1 &= 0.61\sqrt{2 \times 9.81(H - 1.2)}, \\ w_2 &= 0.61\sqrt{2 \times 9.81(H - 0.6)}. \end{aligned} \tag{2}$$

下面仍用微元分析法列微分方程。每一秒钟从每个孔流出的水的容积分别为 w_1s_1 与 w_2s_2，其中 s_1 与 s_2 分别表示两个孔的面积。在 $d\tau$ 时间里从两个孔中流出的水的容积为 $(w_1s_1+w_2s_2)d\tau$。注意到 $dH<0$，故在 $d\tau$ 时间里容器中水减少的容积为 $-\pi\times(1.8/2)^2dH$。两者应当相等，即有

$$(w_1s_1+w_2s_2)d\tau=-\pi\times(1.8/2)^2dH,$$

或写为

$$\frac{dH}{d\tau}=-\frac{w_1s_1+w_2s_2}{\frac{\pi}{4}\times(1.8)^2}. \tag{3}$$

把(2)代入(3)，再把 s_1 与 s_2 的数值代入之，便得方程式

$$\frac{dH}{d\tau}=-\frac{0.0061\sqrt{19.6}}{4\times3.24}\left[\sqrt{H-1.2}+4\sqrt{H-0.6}\right]. \tag{4}$$

分离变量得

$$d\tau=-\frac{4\times3.24}{0.0061\sqrt{19.6}}\times\frac{dH}{\sqrt{H-1.2}+4\sqrt{H-0.6}},$$

初始条件为 $H(0)=3$。从而积分上式得

$$\tau=-\frac{1}{0.0021}\int_3^H\frac{dH}{\sqrt{H-1.2}+4\sqrt{H-0.6}}. \tag{5}$$

显见，液面从 3 米降到 1.5 米所需的时间可用下面的积分来表示：

$$\tau=\frac{1}{0.0021}\int_{1.5}^3\frac{dH}{\sqrt{H-1.2}+4\sqrt{H-0.6}}.$$

为了计算这个积分，将被积函数的分子与分母乘上

$$4\sqrt{H-0.6}-\sqrt{H-1.2},$$

可以得

$$\tau=\frac{1}{0.0021}\left[\int_3^{1.5}\frac{\sqrt{H-1.2}}{15H-8.4}dH-4\int_3^{1.5}\frac{\sqrt{H-0.6}}{15H-8.4}dH\right].$$

在右端第一个积分中，令 $H-1.2=y^2$，在第二个积分中令 $H-0.6=$

x^2. 于是,当 $H=3$ 时, $x=\sqrt{2.4}=1.549$, $y=\sqrt{1.8}=1.342$;当 $H=1.5$ 时, $x=\sqrt{0.9}=0.949$; $y=\sqrt{0.3}=0.548$. 所以

$$\tau=\frac{1}{0.0021}\left\{\int_{1.549}^{0.949}\left[\frac{8}{25}\times\frac{1}{0.6+15x^2}-\frac{4}{7.5}\right]dx\right.$$

$$\left.-\int_{1.342}^{0.548}\left[\frac{32}{25}\times\frac{1}{9.6+15y^2}-\frac{1}{7.5}\right]dy\right\}$$

$$=\frac{1}{0.0021}\left\{\frac{8}{75}\operatorname{tg}^{-1}5x\Big|_{1.549}^{0.949}-\frac{4x}{7.5}\Big|_{1.549}^{0.949}\right.$$

$$\left.-\frac{8}{75}\operatorname{tg}^{-1}1.25y\Big|_{1.342}^{0.548}-\frac{y}{7.5}\Big|_{1.342}^{0.548}\right\}$$

$$\doteq\frac{1}{0.0021}\left\{\frac{8}{75}(1.363-1.442)+0.32\right.$$

$$\left.-\frac{8}{75}(0.601-1.033)-0.106\right\}$$

$$=\frac{0.252}{0.0021}=120(\text{秒}).$$

作为第二个例子,考虑有一正圆柱形或角柱形的盛满水的容器,其底部开有一个边为 a 及 b 的长方形小孔,用闸门关住. 设闸门在瞬间 $\tau=0$ 时开始以速度 w 沿着一边作均匀的滑动而将孔打开. 若开始时水位高为 H,容器的横截面积为 F, 试求经过时间 τ_1 闸门完全启开后($\tau_1=b/w$)水位降低的数值 x_1(见图 6.5).

设 x 为开始时的液面到瞬间 τ 时的液面间的距离. 当时刻 $\tau<\tau_1$ 时,闸门没有完全打开,打开的孔是边长分别为 a 与 $\omega\tau$ 的长方形. 此时可得方程

$$F\frac{dx}{d\tau}=aw\tau\varphi\sqrt{2g(H-x)}. \tag{6}$$

分离变量后积分,可以得到

$$F\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{H-x}}=\varphi aw\sqrt{2g}\int_0^{\tau_1}\tau\, d\tau,$$

由此可得

$$2F(\sqrt{H}-\sqrt{H-x_1})=\frac{\varphi aw\sqrt{2g}}{2}\tau_1^2=\frac{\varphi ab\tau_1\sqrt{2g}}{2}.$$

解此方程式得

$$x_1=\frac{\varphi ab\tau_1\sqrt{2g}}{2F}\left(\sqrt{H}-\frac{\varphi ab\tau_1\sqrt{2g}}{8F}\right). \tag{7}$$

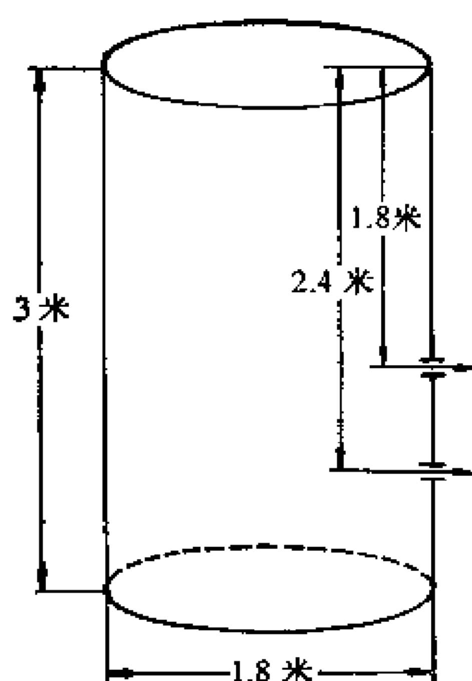


图 6.4

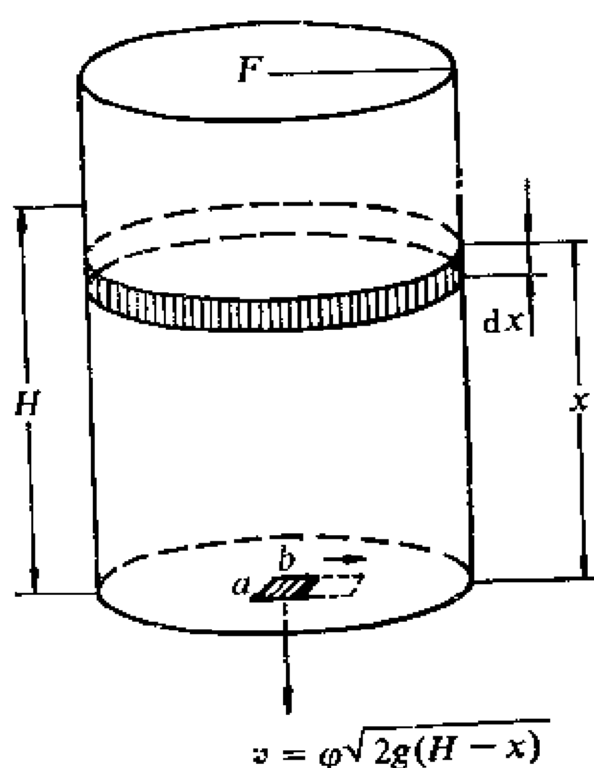


图 6.5

§4 关于经济增长的一个模型

经济增长理论是现代西方宏观经济理论的一个重要组成部分。它是为解释经济的增长和经济的周期变化现象而发展起来的理论。我们知道，一个国家各种产业的总产量、国民收入、就业水平及物价水平等，不可能长期维持在某一固定均衡水平上，而是在不断地变化着的。这种变动常表现为两种不同的类型，一种是长期增长的趋势，即随着劳动力和资本存量的增加及科学技术的进步，总产量、国民收入、就业水

平将随时间不断增加。这就是经济的增长现象。另一种类型是经济增长是不平稳的，有时经济发展高于某个增长趋势，呈现高度繁荣；有时又低于某个增长趋势，表现出经济萎缩或衰退，这种经济波动现象，称为经济周期或经济循环。那末，为什么会出现经济增长或经济周期现象？本节将通过建立经济增长的索洛(Solow)模型进行宏观经济的分析。

我们作如下一些假设：

(1) 反映产量 Q 与资本 K 及劳力 L 的关系的生产函数是一次齐次的，例如熟知的柯布-道格拉斯生产函数是

$$Q=f(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\quad 0<\alpha<1 \tag{1}$$

(2) 产出-资本比例 Q/K 是可变的，资本-劳力比 K/L 也是可变的。

(3) 边际生产力递减，即有

$$f_k=\frac{\partial f}{\partial K}>0,\quad f_L=\frac{\partial f}{\partial L}>0,\quad f_{KK}=\frac{\partial^2 f}{\partial K^2}<0,\quad f_{LL}=\frac{\partial^2 f}{DL^2}<0,$$

其中 $f=f(K,L)$ 为生产函数。又

$$f(0,1)=0,\quad f_K(0,1)=\infty,\quad f_K(\infty,1)=0.$$

(4) 劳动力增长率为常数，即

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\Big/L=\alpha_0,$$

从而得到

$$L(t)=L(0)\mathrm{e}^{\alpha_0 t}.$$

(5) 国民收入 Y 与投资 I 的关系是：

$$Y=\frac{I}{S},$$

其中 S 为储蓄。

由上面这些假设可建立如下的索洛模型：

$$Q=f(K,L), \tag{2}$$

$$Y=I/S, \tag{3}$$

$$I=\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

$$Q = Y, \tag{5}$$

$$\frac{dL}{dt} = \alpha_0 L. \tag{6}$$

其中(2),(3)为行为方程式,分别表示供给和需求,(4)为定义式,(6)为劳动力指数函数形式的假定,(5)是平衡方程式,它是索洛模型的基本依据。即生产量等于国民收入。下面我们将证明产量 Q,资本 K,国民收入 Y,投资 I 在时间充分长时,均与劳力 L 为同阶的无穷大,且增长率是一样的,均为劳动力的增长率 α_0。

现在我们建立关于 $R = K/L$ 的微分方程。由(2)得

$$Q = Lf\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L\varphi(R). \tag{7}$$

由假定 $f_K(0,1) = \infty$, $f_K(\infty,1) = 0$ 得

$$\varphi'(0) = \infty, \ \varphi'(\infty) = 0. \tag{8}$$

因为

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{I}{L} - \frac{K}{L} \cdot \frac{L'}{L}$$

$$= \frac{SY}{L} - \alpha_0 R = S\frac{Q}{L} - \alpha_0 R = S\varphi(R) - \alpha_0 R,$$

这样就导得关于 R 的一阶非线性微分方程

$$\frac{dR}{dt} + \alpha_0 R = S\varphi(R). \tag{9}$$

$\varphi(R)$ 是 R 的非线性函数,它满足(8)及下式

$$\varphi(0) = f(0,1) = 0. \tag{10}$$

首先注意到存在 $R = R_0$ 为微分方程(9)的解。这只要考虑到

$$[S\varphi(R) - \alpha_0 R]|_{R=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dR}[S\varphi(R) - \alpha_0 R]|_{R=0} = S\varphi'(0) - \alpha_0 = +\infty,$$

$$\frac{d^2}{dR^2}[S\varphi(R) - \alpha_0 R] = S\varphi''(R) = Sf_{KK}\left(\frac{K}{L}, 1\right) < 0,$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{d}{dR}[S\varphi(R) - \alpha_0 R] = \lim_{R\to\infty}(S\varphi'(R) - \alpha_0) = -\alpha_0,$$

可以证得必存在 $R=R_1$ 使 $S\varphi'(R_1)-\alpha_0=0$，即 $\varphi'(R_1)=\alpha_0/S$。函数 $S\varphi(R)-\alpha_0R$ 在 $R=R_1$ 处取到最大值。此外存在$R=R_0$ 使$S\varphi(R_0)-\alpha_0R_0=0$，且当 $R>R_0$ 时，$S\varphi(R)-\alpha_0R<0$，而当 $R<R_0$时，$S\varphi(R)-\alpha_0R>0$。再由方程(9)得，当 $R>R_0$ 时有 $R'(t)<0$，而当 $R<R_0$ 时有 $R'(t)>0$。又 $R'|_{R=R_0}=0$。从而可知 $S\varphi(R)-\alpha_0R$ 有两个零点$R=0$ 与 $R=R_0$。由(9)得

$$\int_{R(t^*)}^{R(t)}\frac{\mathrm{d}R}{S\varphi(R)-\alpha_0R}=\int_{t^*}^{t}\mathrm{d}t,$$

故证得 $R=R_0$ 是(9)的一个特解，且

$$\lim_{t\to+\infty}R(t)=R_0, \tag{12}$$

即有

$$\lim_{t\to+\infty}K/L=R_0, \tag{13}$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty}Y/L=\lim_{t\to+\infty}Q/L=\lim_{t\to+\infty}\varphi(K/L)=\varphi(R_0),$$

$$\lim_{t\to+\infty}I/L=\lim_{t\to+\infty}SQ/L=S\varphi(R_0).$$

由此可知 Q,Y,I,K 均为 L 的同阶无穷大量，有共同的增长率 α_0。

对于柯布-道格拉斯生产函数(1)，易知(9)变为贝努里方程

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+\alpha_0R=SAR^{\alpha}. \tag{14}$$

注意在此情况下

$$\frac{Q}{L}=A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}=\varphi(R)=AR^{\alpha}.$$

先具体确定 R_0 与 R_1. R_0 满足

$$SAR_0^{\alpha}=\alpha_0R_0,$$

即

$$R_0^{1-\alpha}=SA/\alpha_0. \tag{15}$$

R_1 满足

$$SA\alpha R_1^{\alpha-1}=\alpha_0,$$

即

$$R_1^{1-\alpha} = SA\alpha/\alpha_0. \tag{16}$$

方程(14)的解为

$$R^{1-\alpha} = \frac{SA}{\alpha_0} + Ce^{(\alpha-1)\alpha_0 t}$$

$$= R_0^{1-\alpha} + Ce^{(\alpha-1)\alpha_0 t}.$$

若 $R(t_1) = R_1$,则有

$$R_1^{1-\alpha} = R_0^{1-\alpha} + Ce^{(\alpha-1)\alpha_0 t_1},$$

$$C = [R_1^{1-\alpha} - R_0^{1-\alpha}]e^{-(\alpha-1)\alpha_0 t_1}.$$

所以

$$R^{1-\alpha} - R_0^{1-\alpha} = [R_1^{1-\alpha} - R_0^{1-\alpha}]e^{(\alpha-1)\alpha_0(t-t_1)}. \tag{17}$$

显见有 $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t) = R_0.$

当然也可以建立 K 的微分方程:

$$\frac{dK}{dt} = I = SY = SQ = SAK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

把它写为

$$K^{-\alpha}\frac{dK}{dt} = SAL^{1-\alpha},$$

或

$$\frac{dK^{1-\alpha}}{dt} = (1-\alpha)SAL^{1-\alpha} = (1-\alpha)SAL_{(0)}^{1-\alpha}e^{\alpha_0(1-\alpha)t},$$

积分得

$$K_{(t)}^{1-\alpha} = K_{(0)}^{1-\alpha} + (1-\alpha)SAL_{(0)}^{1-\alpha}\int_0^t e^{\alpha_0(1-\alpha)S}dS$$

$$= K_{(0)}^{1-\alpha} + \frac{SAL_{(0)}^{1-\alpha}}{\alpha_0}[e^{\alpha_0(1-\alpha)t} - 1],$$

从而有

$$K(t) = \left\{K^{1-\alpha}(0) - \frac{SAL^{1-\alpha}(0)}{\alpha_0} + \frac{SAL^{1-\alpha}(0)}{\alpha_0}e^{\alpha_0(1-\alpha)t}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$= \left\{K^{1-\alpha}(0) - \frac{SAL^{1-\alpha}(0)}{\alpha_0} + \frac{SA}{\alpha_0}\cdot L^{1-\alpha}(t)\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{16}$$

显然有 $\lim\limits_{t\to+\infty} K(t)=\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} L(t)=\infty$,

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{K(t)}{L(t)}\right]^{1-\alpha}=\frac{SA}{a_0^3}.$$

习 题

1. 求曲线,使其法线被第一象限两坐标轴所截线段的长等于2,且经过坐标原点。

2. 在曲线的任意点上,以切线和法线为边的矩形面积等于以该点横坐标线和纵坐标线的长为边的矩形面积,求此曲线族。

3. 设质量为 m 的炸弹的水平初速为 v_0,由实验知道,炸弹下落时遇到空气的阻力 $R=kv^3$,其中 v 为炸弹下落速度,k 为常数。求炸弹的运动规律及运动轨道。

4. 求向量函数 $\boldsymbol{u}=2xz^2\boldsymbol{i}-(2z^2y+z^2)\boldsymbol{j}$的旋度场。并求对应该旋度方向场中的方向为切线作出的曲线(有时称之为向量线)。

5. 微生物培养的增殖速率和它们现有的量及现有的营养物质的量的乘积成正比(比例系数为 k);营养物质减少的速率和微生物的现有量成正比(比例系数为 k_1)。在实验开始时,容器内有 A_0 克的微生物和 B_0 克的营养物质。试求微生物的量 A 及营养物质的量 B 随时间的变化规律。

6. 在直线上某质点为集中于该直线上某点之力所吸引,其大小与引力中心到质点间距离的平方成正比,设运动开始时,质点距吸引力中心的距离为 a,且初速为零。

① 求质点的运动速度;

② 求质点的运动规律及到达引力中心所需的时间;

③ 另一质点自无穷远处依同一规律同时出发,初速为零。当前一质点的速度与后一质点在 a 处的速度相等时,求前一质点运动的距离。

7. 一气球重为 Q,牵引一堆在地面上的绳铅直上升。作用在气球上的力有三:升力 P,重力 Q,与速度平方成正比的阻力 $R=-\beta\dot{x}^2$。设绳的单位长度重为ρ,开始时气球静止且高度为 H,求其上升速度。

8. 根据弹道学,炮弹的速度 v 与所经过的路程 l 适合关系式 $v=al^n/(b+l^n)$ $(n<1)$,求时间 t 与路程 l 的关系。

9. 容器中有S_0千克盐溶解于200升的水中,从时间 $t=0$ 开始,向容器注入每

升水含500克盐的盐水，注入的速率为4升/分，经充分搅拌的溶液又以相同的速率流出容器.试求在任何时间 $t>0$ 容器内盐的浓度.又若流出容器的速率与容器中的盐溶液浓度成一个非线性的函数关系，不妨设为函数 $g\left(\frac{s}{200}\right)$，则浓度是怎样的函数.

第七章 边值问题

§1 导弹跟踪问题

前面几章，我们讨论了常微分方程的初值问题。对于二阶常微分方程，初值问题的力学意义是：已知物体运动的初始位置和初始速度，要求确定其运动的规律。在实际应用中，常常要讨论在第一章中已经提及的另一类定解问题——边值问题。下面，我们考察一个实际问题的模型：导弹跟踪问题。

如图 7 所示，设在初始时刻 $t=0$，导弹位于坐标原点$(0,0)$，飞机位于点(a,b)。飞机沿着平行于 x 轴方向以常速度 v_0 飞行。导弹在时刻 t 的位置为点(x,y)，其速度为常值 v_1。导弹在飞行过程中，按照制导系统始终指向飞机。现在的问题是：确定导弹的飞行轨迹以及击中飞机所需要的时间 T。

首先，我们来建立导弹的运动方程。导弹的运动轨迹在点 $M(x,y)$处的切线方程为

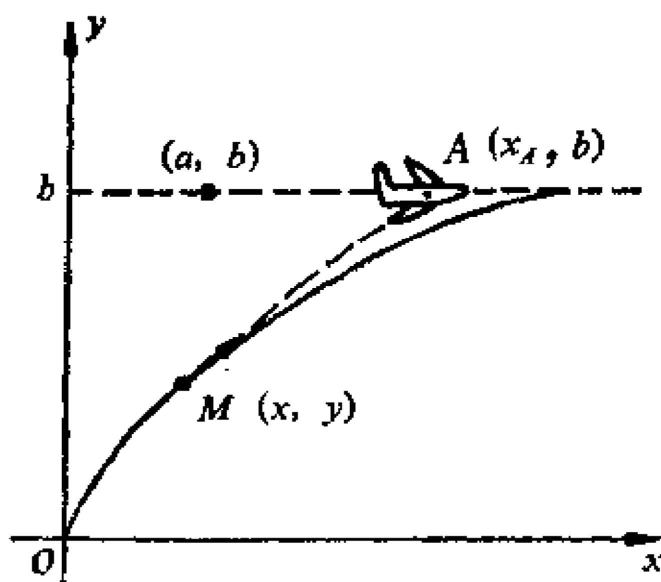


图 7-1

$$Y-y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(X-x)=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(X-x)$$

其中(X,Y)为切线上动点的坐标．由于点$A(x_A,b)$应位于切线上，且$x_A=a+v_0t$，因此

$$b-y=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(a+v_0t-x),$$

从而导弹的飞行轨线由方程组

$$\begin{cases}\dot{x}(b-y)=\dot{y}(a+v_0t-x), & (1)\\ \dot{x}^2+\dot{y}^2=v^2 & (2)\end{cases}$$

给出．根据(1)式，得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(b-y)=a+v_0t-x,$$

两边关于t求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(b-y)-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(b-y)=v_0. \tag{3}$$

从方程(2)，得到

$$\dot{y}^2\cdot\left[1+\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)^2\right]=v^2,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\Big/\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]^{1/2},$$

代入(3)式，得到导弹的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}(b-y)=\lambda\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{4}$$

其中$\lambda=v_0/v$表示飞机和导弹的速度比．

方程(4)是一个二阶非线性方程．根据导弹初始时刻位于(0,0)点，我们有

$$x(0)=0. \tag{5}$$

在时刻T，导弹击中目标，因此成立

$$x(b)=a+v_0T,\tag{6}$$

T 为跟踪时间，待确定。于是，导弹跟踪问题归结为求二阶非线性方程(4)的满足边值条件(5)、(6)的解。

上述问题可以通过初等积分法解决。置 $p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，则 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$。因此，方程(4)化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}(b-y)=\lambda[1+p^2]^{1/2}.\tag{7}$$

它是可分离变量型方程，其通积分是

$$\ln[p+(1+p^2)^{1/2}]=-\lambda\ln(b-y)+C_1,$$

其中 C_1 是任意常数。方程(7)的初始条件为

$$p(0)=a/b.\tag{8}$$

置 $\mu=a/b,\qquad K=\mu+\sqrt{1+\mu^2}.$

根据初始条件(8)，得到

$$C_1=\ln K+\lambda\ln b=\ln(Kb^\lambda),$$

从而

$$\ln[p+\sqrt{1+p^2}]=\ln(b-y)^{-\lambda}+\ln(Kb^\lambda)=\ln[Kb^\lambda/(b-y)^\lambda],$$

所以

$$p+\sqrt{1+p^2}=Kb^\lambda/(b-y)^\lambda.$$

于是，我们得到降阶的方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{2}\left[\frac{Kb^\lambda}{(b-y)^\lambda}-\frac{(b-y)^\lambda}{Kb^\lambda}\right].$$

它的通解是

$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{Kb^\lambda}{(\lambda-1)(b-y)^{\lambda-1}}+\frac{(b-y)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)Kb^\lambda}\right]+C,\tag{9}$$

其中 C 是任意常数。根据第一个边值条件(5)，求得

$$C=b[(1+K^2)\lambda+K^2-1]/2K(1-\lambda^2).\tag{10}$$

一般来说，$v_0<v$，所以 $\lambda<1$。将(10)代入(9)式，我们得到导弹的飞行

轨线方程为

$$x=\frac{1}{2}\left[\frac{(b-y)^{1+\lambda}}{(1+\lambda)Kb^{\lambda}}-\frac{Kb^{\lambda}(b-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]$$

$$+b[(1+K^2)\lambda+K^2-1]/2K(1-\lambda^2). \tag{11}$$

利用第二个边值条件(6)：$x(b)=a+v_0T$，求出导弹的跟踪时间为

$$T=\frac{c-a}{v_0}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a\lambda}{v(1-\lambda^2)}. \tag{12}$$

对于一般的二阶线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=f(x), \tag{13}$$

假设函数 $p(x)$，$q(x)$和 $f(x)$都在区间$[a,b]$上连续，求方程(13) 的满足条件

$$\begin{cases}\alpha_1y(a)+\alpha_2y'(a)=A, & (14)\\ \beta_1y(b)+\beta_2y'(b)=B & (15)\end{cases}$$

的解。因为这类问题中关于解 $y(x)$和它的导数 $y'(x)$所加的条件，是在区间$[a,b]$的两个不同的点(边界点)$x=a$ 和 $x=b$ 上给出的，它不同于初值问题仅仅在同一个点 $x=x_0$ 上给出 y 以及它的导数 y' 的值。如第一章所介绍的，(14)，(15)是边值条件。

下面我们考察初值问题与边值问题解之间的差别：

二阶线性方程初值问题解的存在唯一性定理告诉我们，当 $p(x)$，$q(x)$和 $f(x)$在区间(a,b)上连续时，方程(13)的满足初值条件 $y(x_0)=A$，$y'(x_0)=B$ 的解，在(a,b) 上存在且唯一。那末，对于边值问题(13)～(15)，同样的结论不一定成立。请看以下例题。

例 考察边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=x, & (16)\\ y(0)=0,\ y(2\pi)=1. & (17)\end{cases}$$

方程(16)的通解是

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x,$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数。根据边值条件(17)得到 C_1 和 C_2 适合

$$\begin{cases} C_1 = 0 & (18) \\ C_1 + 2\pi = 1 & (19) \end{cases}$$

这是一个矛盾方程组，因此边值问题(16)，(17)无解。

§2　二阶方程边值问题解的存在唯一性

对于二阶线性齐次方程的边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\dfrac{dy}{dx} + q(x)y = 0, & (1) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A, & \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B, & (2) \end{cases}$$

我们有下列存在唯一性结果。

定理 1　设函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上连续，$\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x$ 是二阶齐次线性方程(1)的两个线性无关解，记

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi_1'(a) & \alpha_1\varphi_2(a) + \alpha_2\varphi_2'(a) \\ \beta_1\varphi_1(b) + \beta_2\varphi_1'(b) & \beta_1\varphi_2(b) + \beta_2\varphi_2'(b) \end{vmatrix},$$

则边值问题(1)、(2)存在唯一解的充要条件是

$$\Delta \neq 0.$$

证　方程(1)的通解是

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x),$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数。由边值条件(2)得到

$$\begin{aligned} &C_1[\alpha_1\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi_1'(a)] + C_2[\alpha_1\varphi_2(a) + \alpha_2\varphi_2'(a)] = A, \\ &C_1[\beta_1\varphi_1(b) + \beta_2\varphi_1'(b)] + C_2[\beta_1\varphi_2(b) + \beta_2\varphi_2'(b)] = B. \end{aligned} \quad (3)$$

当 $\Delta \neq 0$ 时，上述方程组存在唯一的解 C_1 和 C_2，因此边值问题(1)、(2)的解存在且唯一。反之，若边值问题存在唯一解，则方程组(3)存在唯一的解C_1 和 C_2，所以 $\Delta \neq 0$。

推论 1　二阶线性齐次方程(1)满足非齐次边值条件

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (4)$$

的两点边值问题存在唯一解的充要条件是

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_2(a) \\ \varphi_1(b) & \varphi_2(b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

推论 2 二阶线性齐次方程(1) 满足齐次边值条件

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

的边值问题有非零解的充要条件是

$$\Delta_1 = 0.$$

下面我们讨论二阶线性非齐次方程的两点边值问题。

考察非齐次方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \tag{5}$$

定理 2 设 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上连续，则两点边值问题 (5)、(4)存在唯一解的充要条件是相应的齐次边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\dfrac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

只有零解。

证 设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关解，$y^*(x)$ 是方程(5)的一个特解，则方程(5)的通解是

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + y^*(x),$$

其中 C_1, C_2 是任意常数。由边值条件(4)得

$$\begin{aligned} C_1\varphi_1(a) + C_2\varphi_2(a) &= A - y^*(a), \\ C_1\varphi_1(b) + C_2\varphi_2(b) &= B - y^*(b). \end{aligned} \tag{7}$$

置

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_2(a) \\ \varphi_1(b) & \varphi_2(b) \end{vmatrix}.$$

则当 $\Delta_1 \neq 0$ 时，存在唯一的一组 C_1 和 C_2 满足(7)，从而得边值问题(5)、(4)的解存在且唯一，反之亦然。另外，二阶线性齐次微分方程(1)的通解是

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x).$$

由边值条件 $y(a)=0, y(b)=0$ 得

$$C_1\varphi_1(a)+C_2\varphi_2(a)=0, \qquad (8)$$
$$C_1\varphi_1(b)+C_2\varphi_2(b)=0.$$

所以当 $\Delta_1\neq 0$ 时，(8)存在唯一的解 $C_1=0, C_2=0$，从而得知边值问题(6)仅有零解，反之亦然。即边值问题(6)只有零解。

现在给出定理 2 的一个应用。显然，如果我们能估计出线性齐次方程(1)的非零解的任意两个零点 α，β(不一定是相邻的零点)的距离 $h=\beta-\alpha$ 的下界

$$\beta-\alpha\geqslant\delta,$$

则当 $\delta_1<\delta$ 时，边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=0,\\ y(a)=0, \quad y(a+\delta_1)=0\end{cases}$$

只有零解 $y(x)\equiv 0$。根据定理 2，非齐次方程(5)的两点边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=f(x),\\ y(a)=A, \quad y(a+\delta_1)=B\end{cases}$$

的解存在且唯一。于是，研究边值问题(5)、(4)的解的存在唯一性问题，归结为讨论二阶线性齐次微分方程(1) 的解的零点的距离的估计问题。下面我们给出方程(1)的解的零点距离的一个估计公式。

定理 3 设 $p(x)$和 $q(x)$在$[a,b]$上连续，且满足

$$|p(x)|\leqslant M, \quad |q(x)|\leqslant N \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

其中 M, N 是非负常数，则二阶线性齐次方程(1) 的非零解 $x(t)$的两个零点之间的距离 h 满足

$$h\geqslant\begin{cases}\dfrac{2}{M}, & \text{当 } N=0 \text{ 时},\\ \dfrac{-3M+\sqrt{9M^2+24N}}{2N}, & \text{当 } N\neq 0 \text{ 时}.\end{cases} \qquad (9)$$

证 若 $g(x)\in C^1[0,h]$，则用分部积分得到恒等式

$$\int_0^x tg'(t)\mathrm{d}t=xg(x)-\int_0^x g(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_x^h (h-t)g'(t)\,dt = -(h-x)g(x) + \int_x^h g(t)\,dt.$$

两式相减得到

$$\int_0^x tg'(t)dt - \int_x^h (h-t)g'(t)\,dt = hg(x) - \int_0^h g(t)dt. \qquad (10)$$

不失一般性，可假设非零解 $y(x)$ 的两个零点为 $x_1 = 0, x_2 = h$，即 $y(0) = y(h) = 0$。

置

$$g(t) = y'(x).$$

根据方程(1)及恒等式(10)，得到

$$\begin{aligned} hy'(x) &= \int_0^x ty''(t)\,dt - \int_x^h (h-t)y''(t)\,dt \\ &= -\int_0^x t[p(t)y'(t) + q(t)y(t)]\,dt \\ &\quad + \int_x^h (h-t)[p(t)y'(t) + q(t)y(t)]dt. \end{aligned}$$

置 $$A = \max_{x\in[0,h]} \left| \frac{dy(x)}{dx} \right|.$$

由微分中值定理，得

$$|y(t) - y(0)| \leqslant At,$$

$$|y(t) - y(h)| \leqslant A(h-t),$$

利用 $|p(x)| \leqslant M$，$|q(x)| \leqslant N$，$\left|\frac{dy(x)}{dx}\right| \leqslant A$，

$$|y(x)| \leqslant A(h-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h, |y(x)| \leqslant Ax,$$

最后得到

$$h\left|\frac{dy(x)}{dx}\right| \leqslant MA\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(h-x)^2\right] + NAh^3/6.$$

由于在 $0 \leqslant x \leqslant h$ 上的函数

$$f(x) = \frac{1}{2}[x^2 + (x-h)^2]$$

在 $x = 0$ 或 $x = h$ 处达到最大值 $\frac{1}{2}h^2$。因此，对于一切 $x \in [0,h]$，成立

$$h\left|\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right|\leqslant A(Mh^2/2+Nh^3/2).$$

所以

$$hA\leqslant A(Mh^2/2+Nh^3/2),$$

即

$$Nh^2+3\,Mh-6\geqslant 0.$$

由于 $h>0$,因此上述不等式的解为

$$h\geqslant\begin{cases}\dfrac{2}{M}, & \text{当 } N=0\text{ 时},\\[2mm] \dfrac{-3M+\sqrt{9M^2+24N}}{2N} & \text{当 } N>0\text{ 时}.\end{cases}$$

证毕。

例 证明:两点边值问题

$$\begin{cases}3\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1+4\sin x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3\,\mathrm{e}^{-x}y=x, & (11)\\[2mm] y(0)=0,\quad y\left(\dfrac{1}{3}\right)=1 & (12)\end{cases}$$

存在唯一的解.

证 显然地有

$$|p(x)|=\left|\frac{1+4\sin x}{3}\right|\leqslant 5/3,\quad |q(x)|=|\mathrm{e}^{-x}|\leqslant 1$$
$$(0\leqslant x\leqslant 1/3),$$

因此,$M=5/3$,$N=1$。根据定理 3,方程(11)的非零解 $y(x)$ 的零点之间的距离 h 满足估计式

$$h\geqslant\frac{-3M+\sqrt{9M^2+24N}}{2N}=1.$$

所以边值问题

$$\begin{cases}3\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1+4\sin x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3\,\mathrm{e}^{-x}y=0\\[2mm] y(0)=0,\quad y\left(\dfrac{1}{3}\right)=0\end{cases}$$

只有零解 $y(x)\equiv 0$。根据定理2得到边值问题(11)、(12)存在唯一的解.

最后，我们讨论二阶非线性方程的边值问题解的存在唯一性。为了简单起见，只考虑两点边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=f\left(t,x,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right), & (13)\\ x(a)=A, \qquad x(b)=B. & (14)\end{cases}$$

首先，容易看出，求边值问题(13)、(14)的解等价于求方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=(a-t)f(t,x,\dot{x})\triangleq F_1(t,y_1,y_2),\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=(b-t)f(t,x,\dot{x})\triangleq F_2(t,y_1,y_2)\end{cases} \tag{15}$$

满足边值条件

$$y_1(a)=A, \qquad y_2(b)=B \tag{16}$$

的解。

事实上，若 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 是微分方程组 (15)的解，满足边值条件(16)，置

$$x(t)=\frac{1}{b-a}\left[(b-t)y_1(t)+(t-a)y_2(t)\right],$$

则利用

$$(b-t)\frac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t}+(t-a)\frac{\mathrm{d}y_2(t)}{\mathrm{d}t}\equiv 0,$$

得到

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{b-a}\left[y_2(t)-y_1(t)\right],$$

因此 $\ddot{x}(t)=\dfrac{1}{b-a}[\dot{y}_2(t)-\dot{y}_1(t)]\equiv f(t,x(t),\dot{x}(t))$，且

$$x(a)=A, \quad x(b)=B.$$

反之，若 $x(t)$ 是边值问题(13)、(14)的解，作变换

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{b-a}\left[(b-t)y_1+(t-a)y_2\right],\\ \dot{x}=\dfrac{1}{b-a}(y_2-y_1),\end{cases} \tag{17}$$

于是，我们得到

$$f(t,x(t),\dot{x}(t))=\ddot{x}(t)=\frac{1}{b-a}[\dot{y}_2(t)-\dot{y}_1(t)],$$

$$0=\frac{1}{b-a}[(b-t)\dot{y}_1(t)+(t-a)\dot{y}_2(t)].$$

解上述关于 $\dot{y}_1,\dot{y}_2$ 的联立方程组，得

$$\begin{cases}\dot{y}_1(t)=(a-t)f(t,x(t),\dot{x}(t))\triangleq F_1(t,y_1(t),y_2(t)),\\ \dot{y}_2(t)=(b-t)f(t,x(t),\dot{x}(t))\triangleq F_2(t,y_1(t),y_2(t)).\end{cases}$$

在(17)中令 $t=a$ 及 $t=b$，即得 $y_1(a)=x(a)=A$，$y_2(b)=x(b)=B$。

关于一般的两点边值问题(15)、(16)我们有下面的结果。

定理 4 设函数 $F_i(t,y_1,y_2)\ (i=1,2)$ 在区域

$$D=\{(t,y_1,y_2)\mid a\leqslant t\leqslant b,|y_1-A|\leqslant h,|y_2-B|\leqslant h\}$$

上是连续的，并且关于 y_1 和 y_2 满足李普希兹条件，即存在正常数 $N>0$，使得当 $(t,y_1,y_2)\in D$，$(t,z_1,z_2)\in D$ 时成立不等式

$$|F_i(t,y_1,y_2)-F_i(t,z_1,z_2)|\leqslant N[|y_1-z_1|+|y_2-z_2|]\ (i=1,2).$$

那末，当 $0<b-a\leqslant r\leqslant h/M$，$Nr<1$ 时，边值问题(15)、(16) 的解存在且唯一。这里

$$M=\max_{\substack{(t,y_1,y_2)\in D\\ i=1,2}}|F_i(t,y_1,y_2)|.$$

证 边值问题(15)、(16)的解 $y_1=y_1(t)$，$y_2=y_2(t)\ (a\leqslant t\leqslant b)$ 等价于积分方程组

$$\begin{cases}y_1(t)=A+\int_a^t F_1(s,y_1(s),y_2(s))\mathrm{d}s,\\ y_2(t)=B+\int_b^t F_2(s,y_1(s),y_2(s))\mathrm{d}s\end{cases}\tag{18}$$

在 $a\leqslant t\leqslant b$ 内的连续解 $y_1=y_1(t)$，$y_2=y_2(t)$。现在利用逐次逼近法证明，积分方程组(18)在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的连续解存在且唯一。

设第 0 次近似为

$$y_1^0(t)\equiv A,$$
$$y_2^0(t)\equiv B.$$

由此依次定义第 k 次近似如下：

$$\begin{cases} y_1^{(k)}t = A + \int_a^t F_1(s, y_1^{(k-1)}(s), y_2^{(k-1)}(s))\mathrm{d}s, \\ y_2^{(k)}(t) = B + \int_b^t F_2(s, y_1^{(k-1)}(s), y_2^{(k-1)}(s))\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{19}$$

$$k = 1, 2, \cdots,$$

显然，对每个自然数 k，$y_1^{(k)}(t)$，$y_2^{(k)}(t)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是连续的，且当 $a \leqslant t \leqslant b$ 时，有

$$|y_1^{(k)}(t) - A| \leqslant M|t-a| \leqslant M|b-a| \leqslant Mr \leqslant h,$$

$$|y_2^{(k)}(t) - B| \leqslant M|t-b| \leqslant M|b-a| \leqslant Mr \leqslant h,$$

因此，$y_1^{(k)}(t)$，$y_2^{(k)}(t)$ $(k=1,2,\cdots)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上有定义且当 $a \leqslant t \leqslant b$ 时 $(t, y_1^{(k)}(t), y_2^{(k)}(t)) \in D$。这就是说，按(19)式确是能够依次构造出函数序列 $\{y_1^{(k)}(t)\}$，$\{y_2^{(k)}(t)\}$ 来。

我们要证明：当 $k \to \infty$ 时，函数序列 $\{y_1^{(k)}(t)\}$ 和 $\{y_2^{(k)}(t)\}$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是一致收敛的。

事实上，容易用数学归纳法证明

$$|y_1^{(n+1)}(t) - y_1^{(n)}(t)| \leqslant MN^n(b-a)^n(t-a) \leqslant MN^n r^{n+1},$$

$$|y_2^{(n+1)}(t) - y_2^{(n)}(t)| \leqslant MN^n(b-a)^n(b-t) \leqslant MN^n r^{n+1}$$

$$(t \in [a, b]).$$

由于 $Nr < 1$，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} MN^n r^{n+1}$ 收敛，所以级数

$$y_i^{(0)}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}[y_i^{(k+1)}(t) - y_i^{(k)}(t)] \qquad (i = 1, 2)$$

在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上是一致收敛的，即得当 $k \to \infty$ 时，$y_i^{(k)}(t)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上分别一致收敛于连续函数 $y_i(t)$ $(i=1,2)$。

因为

$$|y_1^{(k)}(t) - A| \leqslant h, \quad |y_2^{(k)}(t) - B| \leqslant h \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

当 $k \to +\infty$ 时得

$$|y_1(t) - A| \leqslant h, \quad |y_2(t) - B| \leqslant h \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

即 $(t, y_1(t), y_2(t)) \in D$，根据 $F_i(t, y_1, y_2)$ 关于 y_1 和 y_2 满足李普希兹条件，就有

$$|F_i(t,y_1^{(k)}(t),y_2^{(k)}(t))-F_i(t,y_1(t),y_2(t))|\leqslant N[|y_1^{(k)}(t)-y_1(t)|+|y_2^{(k)}(t)-y_2(t)|],\qquad (i=1,2).$$

因此，当 $k\to+\infty$ 时，$F_i(t,y_1^{(k)}(t),y_2^{(k)}(t))$一致收敛于 $F_i(t,y_1(t),y_2(t))(i=1,2)$。在(19)式中令 $k\to+\infty$，极限号和积分号可以交换，得到

$$y_1(t)=A+\int_a^t F_1(s,y_1(s),y_2(s))\mathrm{d}s,$$

$$y_2(t)=B+\int_b^t F_2(s,y_1(s),y_2(s))\mathrm{d}s.$$

即积分方程组(18)存在解 $y_1=y_1(t),y_2=y_2(t)$，它们在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上是连续的。这也就证明了边值问题(15)、(16)的解存在。

边值问题(15)、(16)解的唯一性的证明，留给读者完成。

习　题

证明：边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+(\sin t)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+3x\cos^2t=\mathrm{e}^{t^2},\\ x(0)=1,\quad x\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\end{cases}$$

存在唯一的解。

§3　格林函数和边值问题解的积分表示

上一节给出了二阶方程边值问题存在唯一解的条件，在实际应用中我们还需要解的具体表达式。下面以齐次边值条件的特殊两点边值问题为例，说明用格林函数得出边值问题解的积分表示式的方法。现讨论边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+p(x)\dfrac{dy}{dx}+q(x)y=f(x), & (1)\\ y(a)=y(b)=0 & (2)\end{cases}$$

的求解问题。设函数 $p(x)$、$q(x)$和 $f(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$是相应的齐次方程的一个基本解组，则方程(1)的通解是

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\int_a^x K(x,s)f(s)ds, \tag{3}$$

其中 C_1 和 C_2 是任意常数，而

$$K(x,s)=\begin{vmatrix}\varphi_1(s)\varphi_2(s)\\ \varphi_1(x)\varphi_2(x)\end{vmatrix}\Big/W(s),$$

这里

$$W(s)=\begin{vmatrix}\varphi_1(s) & \varphi_2(s)\\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s)\end{vmatrix}$$

为朗斯基行列式。

现求满足两点边值条件(2)的解，为此将(2)代入(3)，得到

$$C_1\varphi_1(a)+C_2\varphi_2(a)=0,$$

$$C_1\varphi_1(b)+C_2\varphi_2(b)+\int_a^b K(b,s)f(s)ds=0,$$

若选取 $\varphi_1(x)$和 $\varphi_2(x)$分别满足初值条件

$$\varphi_1(a)=1,\quad \varphi_1'(a)=0$$

和

$$\varphi_2(a)=0,\quad \varphi_2'(a)=1,$$

则当 $\Delta=\varphi_2(b)\neq 0$ 时，得到

$$C_1=0,$$

$$C_2=-\frac{1}{\varphi_2(b)}\int_a^b K(b,s)f(s)ds,$$

因此

$$y(x)=-\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}\int_a^b K(b,s)f(s)ds+\int_a^x K(x,s)f(s)ds$$

$$= -\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}\left[\int_a^x K(b,s)f(s)\mathrm{d}s + \int_x^b K(b,s)f(s)\mathrm{d}s\right]$$

$$+\int_a^x K(x,s)f(s)\mathrm{d}s = \int_a^x\left[K(x,s) - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}K(b,s)\right]f(s)\mathrm{d}s$$

$$-\int_x^b \frac{K(b,s)\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}f(s)\mathrm{d}s.$$

置

$$G(x,s) = \begin{cases} K(x,s) - \dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}K(b,s), & s\in[a,x], \\ -\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(b)}K(b,s), & s\in[x,b], \end{cases}$$

则边值问题(1)、(2)的解可以表达为

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{4}$$

不难验证，函数 $G(x,s)$ 具有下述性质：

(i) $G(x,s)$ 在正方形 $a\leqslant x,s\leqslant b$ 上连续；

(ii) 对每一个固定的 s，$G(x,s)$ 作为 x 的函数当 $x\neq s$ 时满足齐次方程及边值条件

$$G(a,s) = G(b,s) = 0;$$

(iii) $G(x,s)$ 在三角形区域 $a\leqslant x<s\leqslant b$ 及 $a\leqslant s<x\leqslant b$ 上有连续偏导数 G_x 和 G_{xx}；

(iv) 当 $x=s$ 时，$G_x(x,s)$ 有第一类间断点，且它的跳跃度等于1，即

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,s)\Big|_{x=s-0}^{x=s+0} = 1.$$

通常称具有上述性质的函数 $G(x,s)$ 为格林(Green)函数。

例 利用格林函数求解边值问题

$$\begin{cases} (x^2+1)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = (x^2+1)^2, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

解 齐次方程

$$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

具有一个特解 $\tilde{\varphi}_1(x)=x$。于是可求出与 $\tilde{\varphi}_1(x)$ 线性无关的另一个解

$$\tilde{\varphi}_2(x)=Cx\int\frac{e^{+\int\frac{2x}{1+x^2}dx}}{x^2}dx=C(x^2-1)$$

因此解 $\varphi_1(x)=1-x^2$ 和 $\varphi_2(x)=x$ 分别适合初始条件

$$\varphi_1(0)=1,\quad \varphi_1'(0)=0$$

和

$$\varphi_2(0)=0,\quad \varphi_2'(0)=1.$$

并有 $\varphi_2(1)=1$。又

$$K(x,s)=\begin{vmatrix}1-s^2 & s\\ 1-x^2 & x\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}1-s^2 & s\\ -2s & 1\end{vmatrix}$$
$$=\frac{x(1-s^2)-s(1-x^2)}{1+s^2}.$$

因此，格林函数

$$G(x,s)=\begin{cases}-\dfrac{s(1-x^2)}{1+s^2}, & 0\leqslant s\leqslant x,\\ -\dfrac{x(1-s^2)}{1+s^2}, & x\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

边值问题的解是

$$y=\int_0^1 G(x,s)(s^2+1)ds$$
$$=\int_0^x[-s(1-x^2)]ds+\int_x^1[-x(1-s^2)]ds$$
$$=\frac{x^4}{6}+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x.$$

习　题

1. 利用格林函数求解边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x), \qquad (a\leqslant x\leqslant b)$$

$$y(a)=y(b)=0$$

其中函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续。

2. λ 为何值时，边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=f(x),$$

$$y(0)=y(1)=0$$

存在格林函数？

3. 求下列边值问题的格林函数：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-2y=0,$$

$$y(1)=y(2)=0.$$

4. 求解边值问题

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=x^2,$$

$$y(0)=y(1)=0.$$

5. 求下列边值问题的格林函数

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}=e^x$$

$$y(1)=0, \quad y'(3)=0.$$

6. 作出格林函数，求解下列边值问题

$$x^2\ln x\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1-\ln x}{x},$$

$$y(1)=0, \qquad y(2)=0.$$

（提示：对应的齐次方程具有特解 $\varphi_1(x)=\ln x$。）

§4 压杆弯曲的临界力计算与特征值问题

这一节，我们讨论另一类边值问题——特征值问题。首先，考察一个力学问题——压杆弯曲的临界力的计算。

如图 7.2，设有一根长度为 l 的细弹性杆 AB，两端各受大小为 P 的力沿杆的方向作用．杆的端点 A 和 B 可以沿直线 AB 方向移动． 当力 P 达到一定值时，细杆会发生弯曲．欧拉提出下列问题：

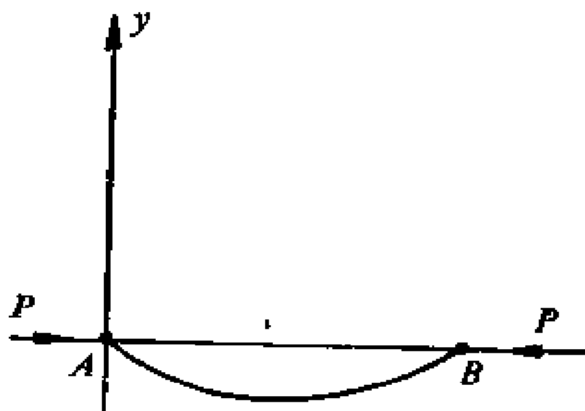


图 7.2

力 P 达到多大时细弹性杆发生弯曲？也即求临界力的大小．

设杆的变位曲线（力学中称为弹性曲线）为 $y=y(x)$．根据材料力学，$y(x)$ 应满足方程

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Py,$$

其中 E 是杆的材料的弹性模量，I 是截面惯矩．置

$$\lambda=\frac{P}{EI}.$$

于是，问题归结为求解下列边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0,\\ y(0)=y(l)=0,\end{cases}$$

即求 λ，使上述问题有非零解． λ 称为特征值，上述问题称为特征值问题．这是一类特殊的边值问题．

对于一般的二阶线性方程，设函数 $p(x)$，$q(x)$ 和 $r(x)$ 在 $[a,b]$

上连续，求 λ 使下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+p(x)\dfrac{dy}{dx}+[q(x)+\lambda r(x)]y=0,\\ \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0,\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0\end{cases}\tag{1}$$

有非零解 $y(x)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 都是给定的常数，$\alpha_{12}+\alpha_2^2\neq 0,\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$。称 λ 为特征值、相应的解 $y(x)$ 为特征函数。这样的边值问题通常称为斯图姆(Sturm)-刘维尔问题。

下面我们讨论特征值和特征函数的一些简单性质。

性质 1 对应于每个特征值的特征函数，除了一个常数因子外是唯一确定的。

证 设 $y_1(x)$和 $y_2(x)(a\leqslant x\leqslant b)$是对应于特征值 λ 的两个特征函数，则有

$$\begin{cases}\alpha_1 y_1(a)+\alpha_2 y_1'(a)=0,\\ \alpha_1 y_2(a)+\alpha_2 y_2'(a)=0.\end{cases}$$

由于 α_1 和 α_2 不同时为零，因此，应有

$$\begin{vmatrix}y_1(a) & y_1'(a)\\ y_2(a) & y_2'(a)\end{vmatrix}=0.$$

根据刘维尔公式，朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_1'(x)\\ y_2(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\equiv 0.$$

所以，函数 $y_1(x)$和 $y_2(x)$在区间$[a,b]$上线性相关，即存在常数 $C\neq 0$，使得

$$y_1(x)=Cy_2(x).$$

性质 2 特征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right]+[q(x)+\lambda r(x)]y=0 \quad (r(x)>0),\\ y(a)=0, \qquad y(b)=0\end{cases}$$

的一切特征值 λ 都是实数。

证 设对应于特征值 $\lambda=\alpha+i\beta$ 的特征函数为

$$y(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x).$$

将 $y(x)$ 代入方程，并比较实部和虚部得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right]+[q(x)+\alpha r(x)]u(x)-\beta r(x)v(x)\equiv 0,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}\right]+[q(x)+\alpha r(x)]v(x)+\beta r(x)u(x)\equiv 0.\end{cases}$$

将上面两式分别乘以 v 和 u 后相减，得到

$$\begin{aligned}-\beta r(x)[u^2(x)+v^2(x)]&=u(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]\\&\quad-v(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(pv')u-(pu')v].\end{aligned}$$

从 a 到 b 积分上列等式，并利用

$$u(a)=v(a)=0,\quad u(b)=v(b)=0,$$

得到

$$-\beta\int_a^b r(x)[u^2(x)+v^2(x)]\mathrm{d}x=0,$$

而 $u^2(x)+v^2(x)\neq 0$，$r(x)>0$，所以 $\beta=0$。即特征值 λ 是实数。

性质 3 对应于不同特征值 λ_i 和 λ_j 的特征函数 $y_i(x)$ 和 $y_j(x)$ 满足

$$\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)\mathrm{d}x=0.$$

证 把

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}\right]+[q(x)+\lambda_i r(x)]y_i(x)=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}x}\right]+[q(x)+\lambda_j r(x)]y_j(x)=0$$

分别乘上 $y_j(x)$，$y_i(x)$，然后相减得到

$$y_j(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}\right]-y_i(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}x}\right]+(\lambda_i-\lambda_j)r(x)y_iy_j=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(y_j\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}-y_i\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}x}\right)\right]+(\lambda_i-\lambda_j)r(x)y_iy_j=0.$$

从而

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)\mathrm{d}x=[p(x)(y_iy_j'-y_jy_i')]|_a^b.$$

根据边值条件

$$\begin{cases}\alpha_1y_i(a)+\alpha_2y_i'(a)=0,\\ \alpha_1y_j(a)+\alpha_2y_j'(a)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_1y_i(b)+\beta_2y_i'(b)=0,\\ \beta_1y_j(b)+\beta_2y_j'(b)=0,\end{cases}$$

且 $\alpha_1^2+\alpha_2^2>0$, $\beta_1^2+\beta_2^2>0$,因此

$$\begin{vmatrix}y_i(a) & y_i'(a)\\ y_j(a) & y_j'(a)\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}y_i(b) & y_i'(b)\\ y_j(b) & y_j'(b)\end{vmatrix}=0,$$

所以

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)\mathrm{d}x=0.$$

由于 $\lambda_i\neq\lambda_j$,得到

$$\int_a^b r(x)y_i(x)y_j(x)\mathrm{d}x=0.$$

现讨论本节开头提出的压杆弯曲问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\lambda y=0,\\ y(0)=y(l)=0.\end{cases}\tag{2}$$

首先,根据性质 2,特征值 λ 必定是实数.分三种情形讨论:

1° $\lambda<0$. 方程(2)有基本解组

$$\varphi_1(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\,x},\quad \varphi_2(x)=\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

由于

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_1(0) & \varphi_2(0)\\ \varphi_1(l) & \varphi_2(l)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ e^{\sqrt{-\lambda}\,l} & e^{-\sqrt{-\lambda}\,l}\end{vmatrix}$$

$$=e^{-\sqrt{\lambda}\,l}-e^{\sqrt{-\lambda}\,l}\neq 0,$$

根据§2定理1的推论2，边值问题(2)没有非零解。

2° $\lambda=0$。方程(2)有基本解组

$$\varphi_1(x)=1,\quad \varphi_2(x)=x.$$

由于

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_1(0) & \varphi_2(0)\\ \varphi_1(l) & \varphi_2(l)\end{vmatrix}=l\neq 0,$$

因此，边值问题(2)也没有非零解。

3° $\lambda>0$。方程(45)有基本解组

$$\varphi_1(x)=\cos\sqrt{\lambda}\,x,\quad \varphi_2(x)=\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

由于

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_1(0) & \varphi_2(0)\\ \varphi_1(l) & \varphi_2(l)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \cos\sqrt{\lambda}\,l & \sin\sqrt{\lambda}\,l\end{vmatrix}=\sin\sqrt{\lambda}\,l,$$

因此，边值问题(2)有非零解的充要条件是

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0,$$

即边值问题(2)的特征值为

$$\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\qquad(n=\pm1,\pm2,\cdots).$$

相应的特征函数为 $y(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$。因为 $\lambda=\frac{P}{EI}$，得到使细弹性杆弯曲的临界力为

$$P_n=EI\lambda_n=EIn^2\pi^2/l^2\qquad(n=\pm1,\pm2,\cdots),$$

使杆弯曲的最小的力是

$$P_1=EI\pi^2/l^2.$$

习　题

1. 求出下列各题中的特征值和特征函数：

(1) $\begin{cases} x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-\lambda y=0, \\ y(1)=0, \quad y(2)=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}-\lambda y=0, \\ y'(0)=0, \quad y'(l)=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}-\lambda y=0, \\ y(0)=0, \qquad y'(l)=0. \end{cases}$

2. λ为何值时，特征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=1, \\ y(0)=0, \quad y(1)=0, \end{cases}$$

无非零解？

3. 解特征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0, \\ y(0)-y'(0)=0, \\ y(l)-y'(l)=0. \end{cases}$$

第八章　奇点、极限环和周期解

§1　受弹簧约束的带电导线的运动·奇点的分类

一、带电导线的运动方程

首先，我们考虑物理学的一个问题。图 8.1 表示一根长度为 l 的带电导线，受到弹性系数为 k 的弹簧的约束，带电导线的另一侧，受到另一条与它平行的无限长导体，由于有电流I通过而产生的磁场力的作用。

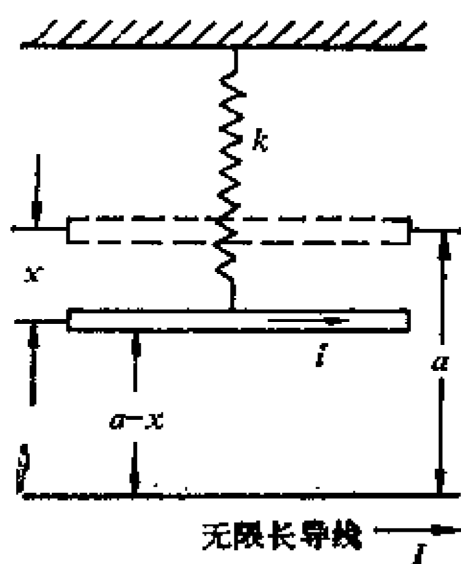


图 8.1

两根导线分别通过电流 i 及 I，设它们在未通过电流时的距离为 a。两根导线通电后，由于磁场力的作用相互吸引.根据物理学的比奥-萨伐尔(Biot-Savart)定律,磁场力为

$$F_1=\frac{2Iil}{a-x},$$

其中x表示长度为 l 的导线的位移。当位移为 x 时，弹簧产生的弹性恢复力是

$$F_2=-kx,$$

其中 $k>0$ 是常数。根据牛顿第二运动定律,带电导线的运动方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+\frac{2Iil}{a-x},\tag{1}$$

其中 m 表示长度为 l 的导线的质量。

置 $$b=2Iil/k,$$
则方程(1)可以写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{m}\cdot\frac{x^2-ax+b}{a-x}. \tag{2}$$

现在的问题是：参数 a 和 b 对系统的运动状态的影响如何？何时系统会发生振荡现象？

置 $y=\frac{dx}{dt}$，则得到与方程(2)等价的方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=\frac{k}{m}\cdot\frac{x^2-ax+b}{a-x}.\end{cases} \tag{3}$$

设代数方程

$$x^2-ax+b=0$$

的根为 x_1,x_2，$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$。显然，$x=x_1,y=0$ 及 $x=x_2$ $y=0$ 都是方程组(3)的解。为了进一步研究系统的状态，我们先介绍一般的二维系统的奇点的分类，然后利用奇点的分类来判别系统的运动状态。

二、二维线性自治系统奇点的分类及相图

对于系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$不显含时间 t，通常称为自治系统或定常系统。我们把变量 $\boldsymbol{x}$ 所在的空间 R^n 称为相空间。对于二维情形，把(x,y)平面称为相平面。

如果 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=0$，称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 为系统(4)的奇点。奇点在力学中对应于系统的平衡位置，因此，奇点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ 有时也称为平衡奇位置。

下面，我们讨论二维线性自治系统

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = ax_1 + bx_2, \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = cx_1 + dx_2. \end{cases} \tag{5}$$

点(0,0)是系统(5)的奇点。置

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

如果$\det A \neq 0$，称奇点(0,0)为*初等奇点*。现在，我们根据矩阵A的特征值的不同情形，对系统(5)的奇点(0,0)进行分类。矩阵A对应的特征方程是

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0. \tag{6}$$

设特征方程(6)的根，即矩阵A的特征值为λ_1和λ_2。

定理1 对于二维线性系统(5)，设$\det A \neq 0$，λ_1和λ_2是A的特征值。则

1° 当$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta(\beta > 0)$时，若$\alpha = 0$，奇点$O(0,0)$为*中心*；若$\alpha < 0$，奇点$O$为*稳定焦点*；$\alpha > 0$时，奇点$O$为*不稳定的焦点*；

2° 当$\lambda_{1,2}$为同号的实数时，奇点O为*结点*；

3° 当$\lambda_{1,2}$为异号的实数时，奇点O为*鞍点*。

证 1° 设$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$。根据线性代数的理论，存在满秩阵$T$，使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

作线性变换$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$，则方程组(5)变成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = (T^{-1}AT)\boldsymbol{y},$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=\alpha y_1+\beta y_2,\\[2ex]\dfrac{dy_2}{dt}=-\beta y_1+\alpha y_2.\end{cases}\tag{6}$$

置

$$y_1=r\cos\theta,\quad y_2=r\sin\theta$$

于是方程组（6）化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=\alpha r\\[2ex]\dfrac{d\theta}{dt}=-\beta.\end{cases}\tag{7}$$

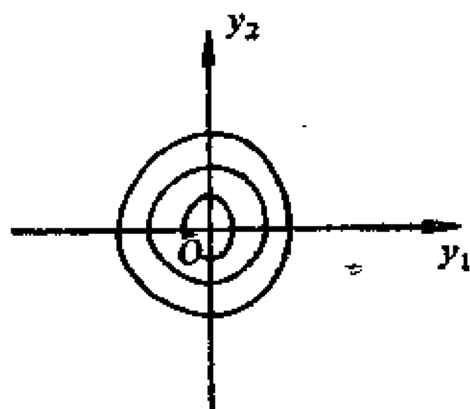
方程组(7)的轨线为

$$r(t)=r_0e^{\alpha t},$$
$$\theta(t)=-\beta t+\theta_0,$$

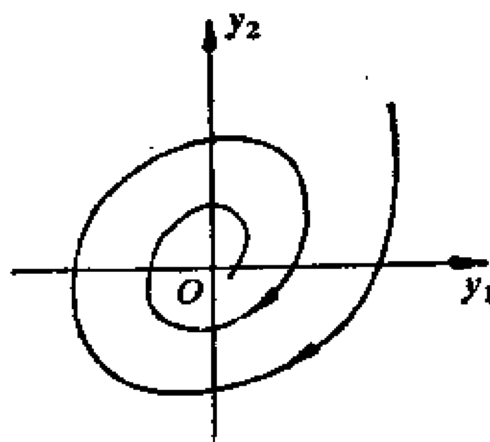
其中 r_0,θ_0 是任意常数。如果 $\alpha=0$,那末 $r(t)=r_0,\theta(t)=-\beta t+\theta_0$. 这是(y_1,y_2) 平面上以原点为中心的一族同心圆.如果 $\alpha\neq0$,则轨线为

$$r(\theta)=r_0\exp\left[-\frac{\alpha}{\beta}(\theta-\theta_0)\right],$$

它是对数螺线(图 8.2)．



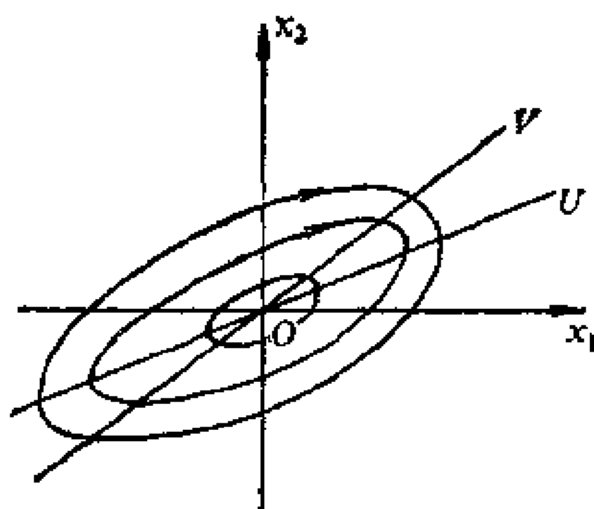
(a)　$\lambda_{1,2}=\pm i\beta$



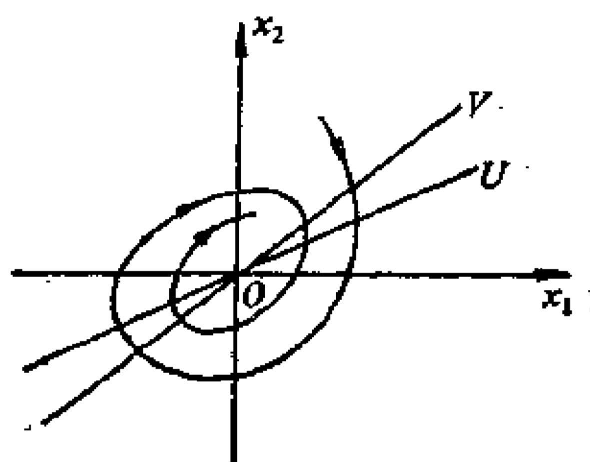
(b)　$\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$
($\alpha<0$ 情形)

图 8.2

由于在线性变换下，直线 $y_1=0$ 和 $y_2=0$ 变为直线 U 和 V，圆变为椭圆，对数螺线仍变为对数螺线，因此，回到原来的 x_1x_2 平面，得到奇点 O 附近的轨线分布图如图 8.3 所示。



(a) 奇点为中心



(b) 奇点为焦点

图 8.3

对于 $\lambda_{1,2}=\pm\beta i$ 情形，奇点 O 附近被一族闭的轨线所充满，这种奇点通常称为中心。当特征值为共轭复数 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ 时，奇点 O 附近的轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 当 $t\to\pm\infty$ 时沿对数螺线趋向于奇点 O 。对应于 $\alpha<0$

情形，一切轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 当 $t\to+\infty$时趋向于 O，这时称奇点 O 为稳定焦点；对应于 $\alpha>0$ 的情形，奇点 O 附近的一切轨线 $\boldsymbol{x}(t)$当 $t\to-\infty$时趋向于 O，即远离奇点，这时称奇点 O 为不稳定焦点。图 8.3 所示的是中心与焦点情形，奇点 O 附近轨线的分布。

2° 设 $\lambda_{1,2}$ 为同号的实数。分两种情形进行讨论。

(a) $\lambda_1\neq\lambda_2$，不妨设 $\lambda_1>\lambda_2$。

设矩阵 A 对应于特征值 λ_1，λ_2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{h}_1$和$\boldsymbol{h}_2$，这时方程组(5)的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{h}_1+C_2e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{h}_2.$$

关于 t 求导得

$$\boldsymbol{x}'(t)=C_1\lambda_1e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{h}_1+C_2\lambda_2e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{h}_2.$$

根据 $\lambda_1>\lambda_2$，得到轨线 $\boldsymbol{x}(t)$的单位切向量 $\boldsymbol{x}'(t)/\|\boldsymbol{x}'(t)\|$ 适合

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\boldsymbol{x}'(t)}{\|\boldsymbol{x}(t)\|}=\frac{\lambda_1C_1\boldsymbol{h}_1}{\|\lambda_1C_1\boldsymbol{h}_1\|}=\pm\frac{\boldsymbol{h}_1}{\|\boldsymbol{h}_1\|},$$

以及

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\boldsymbol{x}'(t)}{\|\boldsymbol{x}'(t)\|}=\pm\frac{\boldsymbol{h}_2}{\|\boldsymbol{h}_2\|}.$$

这表示当 $t\to+\infty$时，轨线 $\boldsymbol{x}(t)$的切线趋于同 $\boldsymbol{h}_1$ 平行，当而 $t\to-\infty$ 时，轨线 $\boldsymbol{x}(t)$的切向趋于同另一特征向量 $\boldsymbol{h}_2$ 平行。射线 L_1:$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1 t}$ 和 L_2：$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{h}_2e^{\lambda_2 t}$ 都是方程组(5) 的轨线。如果 $\lambda_1>\lambda_2>0$，则沿着射线 L_1 和 L_2，$\|\boldsymbol{x}(t)\|\to0$(当 $t\to-\infty$)；如果 $\lambda_2<\lambda_1<0$，则 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\to0$ （当 $t\to+\infty$时）。

(b) $\lambda_1=\lambda_2$。

(i) 如果存在两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{h}_2$，则方程组(5) 的通解是

$$\boldsymbol{x}(t)=(C_1\boldsymbol{h}_1+C_2\boldsymbol{h}_2)e^{\lambda_1 t},$$

此时有无穷多个特征向量，且一切轨线是从原点 O 出发而不含 O 点的射线。

(ii) 只有一个特征向量 $\boldsymbol{h}_1$，这时方程组(5)的通解是

$$\boldsymbol{x}(t)=(C_1+C_2t)\boldsymbol{h}_1e^{\lambda_1 t}+C_2\boldsymbol{h}_2e^{\lambda_1 t},$$

其中 $\boldsymbol{h}_2$ 适合方程

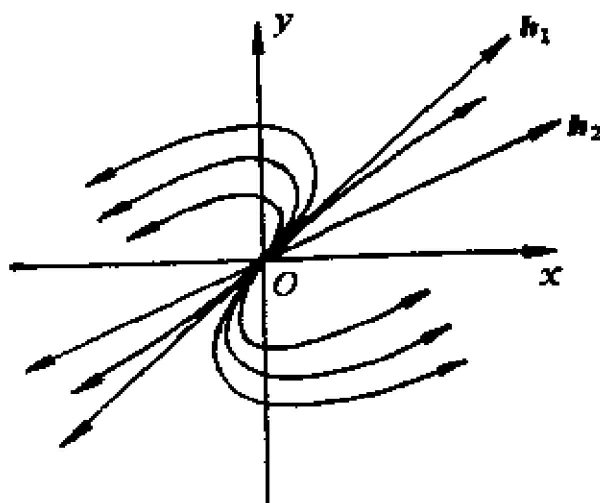
$$(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{h}_2=\boldsymbol{h}_1.$$

因此，当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时，$\boldsymbol{x}(t)\to\boldsymbol{0}$。轨线的单位切向量为

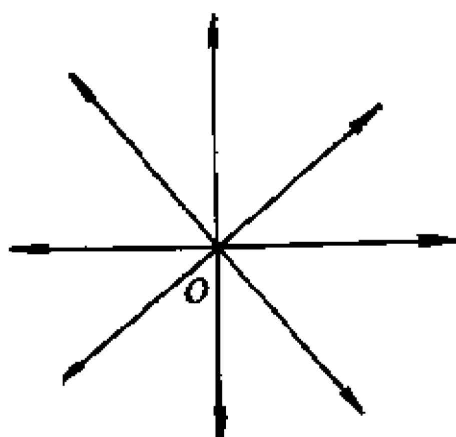
$$\frac{\boldsymbol{x}'(t)}{\|\boldsymbol{x}'(t)\|}=\frac{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}[\lambda_1 c_1\boldsymbol{h}_1+\lambda_1 c_2(\boldsymbol{h}_1 t+\boldsymbol{h}_2)+c_2\boldsymbol{h}_1]}{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\|\lambda_1 c_1\boldsymbol{h}_1+\lambda_1 c_2(\boldsymbol{h}_1 t+\boldsymbol{h}_2)+c_2\boldsymbol{h}_1\|}$$

$$\to\frac{\lambda_1 c_2\boldsymbol{h}_1}{\|\lambda_1 c_2\boldsymbol{h}_1\|}=\pm\frac{\boldsymbol{h}_1}{\|\boldsymbol{h}_1\|}\ (\text{当 } t\to\pm\infty).$$

综上所述，当 $\lambda_{1,2}$ 为同号实数时，奇点(0,0)有下列特征：以半直线轨线



(1) $\lambda_1\neq\lambda_2$　结点



(2) $\lambda_1=\lambda_2$ 临界结点
特征向量无穷多个



(3) $\lambda_1=\lambda_2$　退化结点
特征向量唯一

图 8.4　结点的各种情形($\lambda>0$ 情形)

为分界线，其他轨线在奇点处相切，轨线沿确定的方向进入(或离开)奇点的邻域。通常称这种情形的奇点为结点，分别称情形(b)的(i)、(ii)所对应的结点为临界结点和退化结点(参看图 8.4)。

3° 设 $\lambda_{1,2}$ 为异号实数，不妨设 $\lambda_1>0>\lambda_2$。方程组(5)的通解是

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{h}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+c_2\boldsymbol{h}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

这时，半直线 $L_1:\boldsymbol{x}(t)=c_1\boldsymbol{h}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ 和 $L_2:\boldsymbol{x}(t)=c_2\boldsymbol{h}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ 都是轨线，且沿半直线 L_1，$\boldsymbol{x}(t)\to\mathbf{0}\ (t\to-\infty)$；沿半直线 L_2：$\boldsymbol{x}(t)\to\mathbf{0}$ (当 $t\to+\infty$)。$t\to+\infty$时，有

$$|\boldsymbol{x}(t)-c_1\boldsymbol{h}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}|\to 0,$$

当 $t\to-\infty$时，有

$$|\boldsymbol{x}(t)-c_2\boldsymbol{h}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}|\to 0.$$

这表示其他一切轨线以 L_1 和 L_2 为渐近线。这时的奇点称为鞍点。

鞍点的特征是：存在四条分界线；其他的一切轨线都以 L_1 和 L_2 为渐近线，见图 8.5。

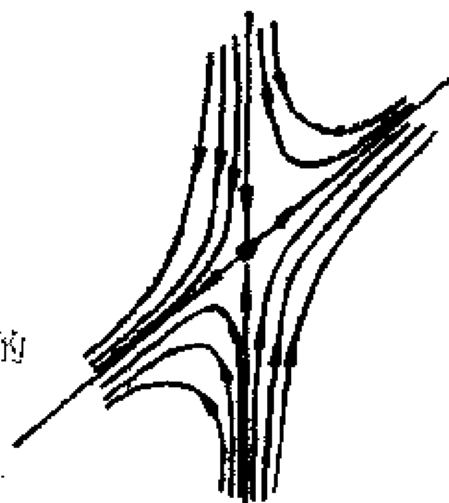


图 8.5

例 1 对于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x-3y,\end{cases}$$

确定奇点的类型，并作出相轨线的分布图(简称为相图)。

解

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix},$$

特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征值是 $\lambda_{1,2}=-1,-2$，因此，根据定理 1，奇点 O 是稳定的结点。下面作出相图，首先求分界线：置 $y=kx$，代入方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-2x-3y}{y},$$

得到斜率 k 应适合方程

$$k=\frac{-2-3k}{k},$$

解得 $k_{1,2}=-1,-2$。从而，分界线是 $y=-x$ 和 $y=-2x$（不含 O点）。那末，其余的轨线究竟与哪一条分界线在原点处相切呢？可以选取某一个特定点来决定方向，如在(1,1)点的方向为(1,-5)。由此立即可得，其余轨线与 $y=-x$相切。相轨线的分布如 图 8.6 所示。

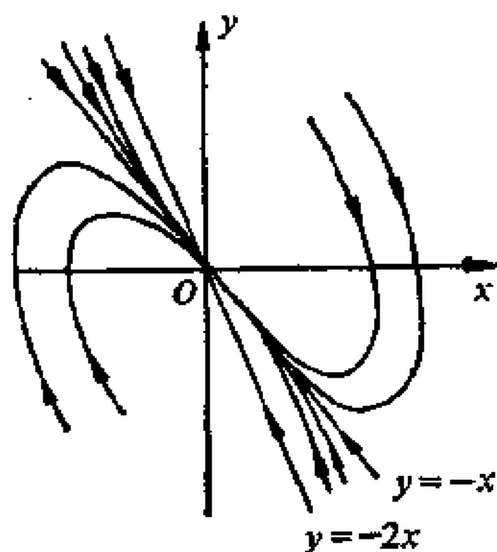


图 8.6

例 2 对于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x-y,\end{cases}\tag{8}$$

1° 确定奇点及其类型；2° 求出相轨线的直角坐标表达式；3° 作出相图。

解 1° 从方程组

$$\begin{cases}x+y-2=0,\\ x-y=0\end{cases}$$

解得 $x=1,y=1$，即奇点为 (1,1)。置 $\xi=x-1$，$\eta=y-1$。则方程组(8)化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\xi+\eta,\\[2mm] \dfrac{d\eta}{dt}=\xi-\eta.\end{cases}\tag{9}$$

方程组(9)的奇点是 (0,0)，其特征方程为 $\lambda^2-2=0$，特征值是 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2}$。因此，(0,0)是方程组(9)的鞍点，即(1,1)是方程组(8)的鞍点。

2° $\dfrac{d\eta}{d\xi}=\dfrac{\xi-\eta}{\xi+\eta}$。这是齐次方程。置 $u=\eta/\xi$，得到变量可分离的方程

$$\frac{1-2u-u^2}{1+u}=\xi\frac{du}{d\xi},$$

通积分为　　$\xi^2-\eta^2-2\xi\eta+c\xi=0$.

特解为

$$u=\pm\sqrt{2}-1,$$

即相轨线的直角坐标式为

$$(x-1)^2-(y-1)^2-2(x-1)(y-1)+c(x-1)=0,$$

分界线为　　$\eta=(\pm\sqrt{2}-1)\xi$.

上述分界线也可以像例 1 一样，置 $\eta=k\xi$，得到

$$k=\frac{1-k}{1+k},$$

解出　　$k_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$.

3° 作相图如图 8.7 所示。

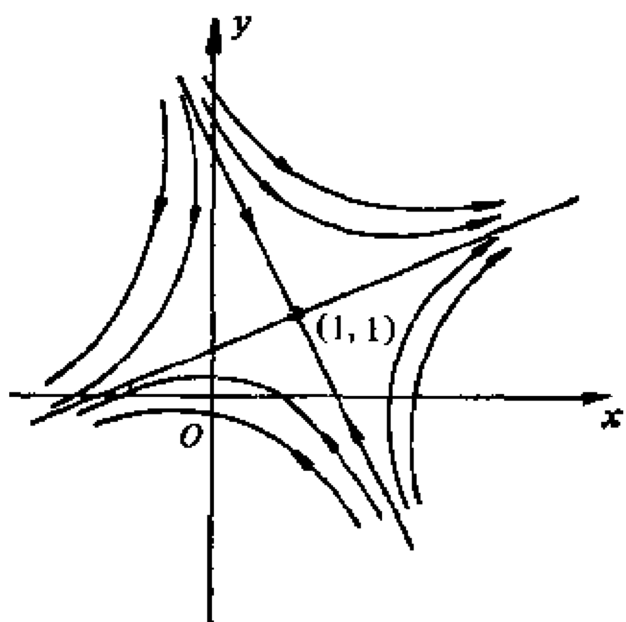


图 8.7

三、非线性系统的佩戎(Perron)定理

现在，我们讨论非线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by+f(x,y),\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=cx+dy+g(x,y).\end{cases}\tag{10}$$

类似于线性系统(5),如果方程组(10)的相轨线都是盘旋趋向于或远离奇点$O(0,0)$,则称奇点O是焦点；如果有两条相轨线趋向于奇点O,两条远离O点,而其他的相轨线都不趋于奇点O,则称O点是鞍点;如果奇点O附近的轨线,在$(0,0)$点有公切线(可能有两条例外),且所有的轨线都同时趋向于奇点O或远离奇点,则称奇点O为结点.

下面,不加证明地介绍裴戎定理，利用它以及定理1,就可解决一般情况下非线性系统(10)的奇点类型的判别问题。

定理2(裴戎定理)　设$f(0,0)=g(0,0)=0$,且$f(x,y)=o(r^{\varepsilon+1})$,$g(x,y)=o(r^{\varepsilon+1})$(当$r\to 0$时),其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$,$\varepsilon>0$。则当奇点$(0,0)$分别是对应线性系统(5)的焦点、非临界结点以及鞍点时,奇点$(0,0)$也分别是原非线性系统(10)的焦点、结点和鞍点；如果$(0,0)$是线性系统(5)的中心,则$(0,0)$是非线性系统(10)的中心或者焦点。

例3　考虑无阻尼的单摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0.$$

置　$y=\dfrac{d\varphi}{dt}$,$\varphi=x$,则得到等价的微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{g}{l}\sin x,\end{cases}\tag{11}$$

首先,求系统(11)的奇点。从方程组

$$\begin{cases}y=0\\ \sin x=0\end{cases}$$

求出$y=0$,$x=n\pi$(n为整数)。因此,奇点为$(n\pi,0)$($n\in Z$)。其次,讨论各个奇点的类型。系统(11)虽然有无穷多个奇点$(n\pi,0)$,但可以分成两类,分别加以讨论。

1° 奇点$(2k\pi,0)$(k为整数)。

置　$\xi=x-2k\pi$,　方程组(11)化为

$$\frac{d\xi}{dt}=y,$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin(2k\pi+\xi)$$

$$=-a\sin\xi=-a\xi+o(\xi^2), \tag{12}$$

其中 $a=g/l>0$。于是,判别方程组的奇点$(2k\pi,0)$的类型,化为判别方程组(12)的奇点(0,0)的类型。方程组(12)所对应的线性系统是

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=y,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-a\xi.\end{cases}$$

特征方程 $\lambda^2+a=0$,具有一对纯虚根 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{a}\,i$。这时,从定理2无法判别奇点(0,0)的类型。但是,我们可直接从原方程

$$\ddot{\varphi}+a\sin\varphi=0$$

求出相轨线的方程.事实上,置 $y=\frac{d\varphi}{dt}$,得到降阶的方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=y\frac{dy}{d\varphi}=-a\sin\varphi,$$

从而,相轨线方程为

$$y^2=2a\cos\varphi+h. \tag{13}$$

对应于$|h|>2a$,$|h|=2a$及$|h|<2a$ 的不同情形,根据方程(13),可作出相轨线的全局分布图(图 8.8)。

2° 奇点$((2k+1)\pi,0)(k\in Z)$。置$\xi=x-(2k+1)\pi$,方程组(11)化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=y,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=-a\sin[(2k+1)\pi+\xi]=a\sin\xi=a\xi+o(\xi^2).\end{cases} \tag{14}$$

方程组(14)对应的线性系统是

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\xi. \end{cases}$$

特征方程为 $\lambda^2 - a^2 = 0$。具有两个异号的特征值 $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a}$。因此奇点 (0,0) 是方程组 (14) 的鞍点。从而，根据裴戎定理，奇点 $((2k+1)\pi, 0)$ 是方程组(11)的鞍点。

图 8.8 表示的是系统(11)的相图。

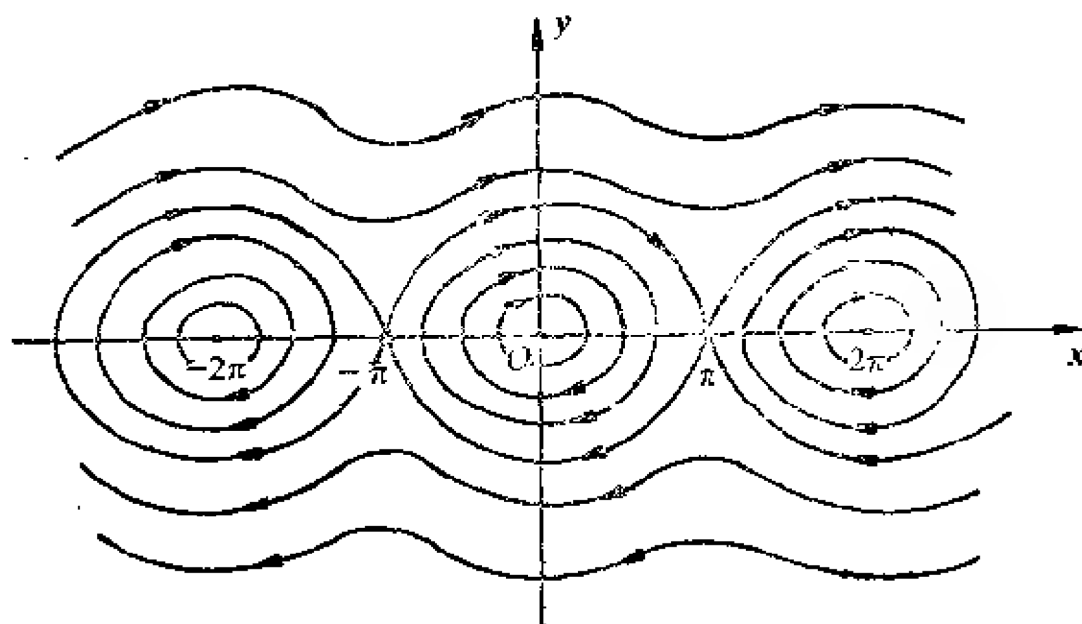


图 8.8

例 4 设 $a \neq b^{+-1}$，且 $(b+1)^2 \neq 4(b-a)$，a,b 为常数。对于微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + \sin x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ax + by, \end{cases} \tag{15}$$

根据 a,b 的不同值，判别奇点(0,0)的类型。

解 微分方程组(15)对应的线性系统的特征方程

$$\lambda^2-(b+1)\lambda+b-a=0,$$

具有特征值

$$\lambda_{1,2}=\frac{b+1\pm\sqrt{(b+1)^2-4(b-a)}}{2}.$$

1° 如果$(b+1)^2<4(b-a)$,则当$b>-1$时，(0,0)点为系统(15)对应的线性系统的不稳定焦点,根据斐戎定理，点(0,0)也是非线性系统(15)的不稳定焦点。同理，$b<-1$时,(0,0)点是系统(15)的稳定焦点。

2° 如果$(b+1)^2>4(b-a)$,则当$b>a$时,根据$b>-1$及$b<-1$不同情况，点(0,0)分别是系统(15)的不稳定结点及稳定结点；当$b<a$时,(0,0)为(15)的鞍点。

四、带电导线运动规律的探讨

现在,我们应用奇点的分类,来解决本节一开始提出的带电导线的振动问题。问题已归结为研究方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{k}{m}\cdot\dfrac{x^2-ax+b}{a-x}.\end{cases}\tag{3}$$

设方程$x^2-ax+b=0$的两个根为x_1和x_2,则系统(3)的奇点为$(x_1,0)$和$(x_2,0)$,而x_1和x_2适合关系式

$$x_1+x_2=a,\quad x_1x_2=b.\tag{16}$$

对于奇点$(x_i,0)$,置

$$\begin{cases}\xi=x-x_i,\\ \eta=y,\end{cases}\qquad(i=1,2)$$

利用

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a-x_i-\xi}=\frac{1}{a-x_i}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\xi}{a-x_i}}\right)$$

$$= \frac{1}{a - x_i}\left(1 + \frac{\xi}{a - x_i} + \cdots\right), \quad \left|\frac{x - x_i}{a - x_i}\right| < 1$$

及 $x_i + x_j = a$，方程组(3)化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{k}{m}[(\xi + x_i)^2 - a(\xi + x_i) + b] \cdot \dfrac{1}{x_j}\left(1 + \dfrac{\xi}{x_j} + \cdots\right) \\ \qquad = \dfrac{k}{m}[\xi^2 + (x_i - x_j)\xi]\left(\dfrac{1}{x_j} + \dfrac{\xi}{x_j^2} + \cdots\right) \\ \qquad = \dfrac{k}{mx_j}(x_i - x_j)\xi + 0(r^2) \quad (i \neq j), \end{cases} \tag{17}$$

其中 $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$。

方程组(17)对应的线性系统为

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \eta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{k}{mx_j}(x_i - x_j)\xi. \end{cases}$$

特征方程是

$$\lambda^2 - \frac{k}{mx_j}(x_i - x_j) = 0,$$

其中

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

分三种情况进行讨论：

1° 若 $b > \frac{a^2}{4}$，则 $x_{1,2}$ 为共轭复数，系统(2)没有奇点。理论上可以证明，任何闭轨线的内部区域中必定包含奇点。因此，当 $b > \frac{a^2}{4}$ 时，系统不存在闭轨线，所以不产生振动。

2° $0<b<a^2/4$，此时有两个奇点$(x_1,0)$和$(x_2,0)$。奇点$(x_1,0)$对应的特征方程为

$$\lambda^2=\frac{k}{mx_2}(x_1-x_2)\quad (x_1>x_2>0),$$

它具有符号相异的实根。因此，(0,0)是线性系统(18)的鞍点。根据裴戎定理，$(x_1,0)$是原系统的鞍点。这时系统不会产生振动。奇点$(x_2,0)$对应的特征方程为

$$\lambda^2=\frac{k}{mx_1}(x_2-x_1)\quad (x_1>x_2>0),$$

它具有纯虚根 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{k}{mx_1}(x_1-x_2)}\,\mathrm{i}$。因此，奇点(0,0)是线性系统(18)的中心。根据裴戎定理无法肯定$(x_2,0)$是否为原系统的中心。这时，可作相图来分析。为此，将(3)改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k}{m}\cdot\frac{x^2-ax+b}{(a-x)y},$$

$x=a$是积分曲线，能量积分为

$$\frac{m}{2}y^2+\frac{1}{2}kx^2+kb\ln|a-x|=C.$$

下面求鞍点的分界线，为此将$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$，$y=0$ 代入能量积分，定出积分常数，得到

$$C=\frac{k}{2}\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)^2+kb\ln\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)=0.$$

因而分界线的方程为

$$\frac{my^2}{2}+\frac{k}{2}\left[x^2-\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)^2\right]+kb\ln\frac{a-x}{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}}$$

图 8.9 表示$0<b<\frac{a^2}{4}$情形的相图。

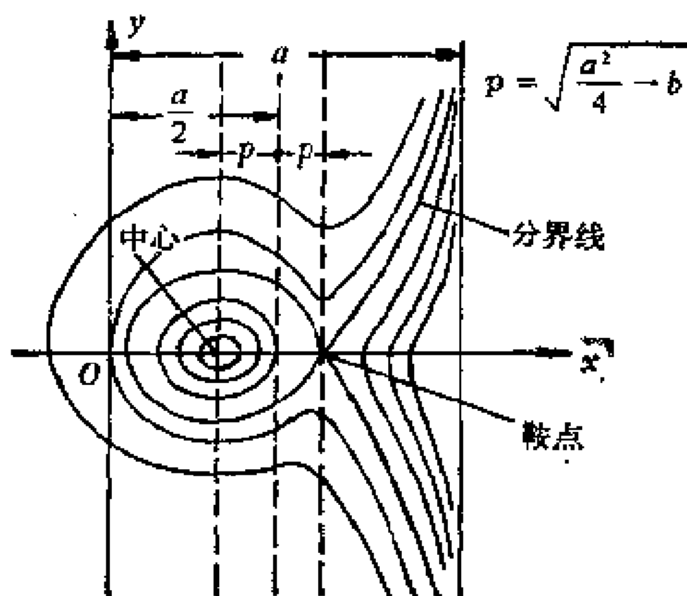


图 8.9

从相图 8.9 可以得到下述结论：

如果初始时刻，相点在分界线环的内部，则导线将作振动。

3° $b=\frac{a^2}{4}$（第二种情况到第一种情况的过渡情形）．第二种情形的两个奇点，随 b 的增加而逐渐接近，当 $b=\frac{a^2}{4}$时重合在一起．图 8.10(a) 画出奇点的接近过程，当 $b=\frac{a^2}{4}$时只有一个奇点，相图如图 8.10(b)所示。

4° $b<0$(可通过改变电流 i 或 I 的方向来改变 b 的符号)．这时 $x_{1,2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$ 中，一个为负，另一个大于a，两个奇点$(x_1,0)$，$(x_2,0)$都是中心。其余的积分曲线都是闭的，分别包围上述两个奇点，这两族闭轨由积分曲线 $x=a$ 隔开(图 8.11)。因此，$b<0$情形，带电导线产生振动。

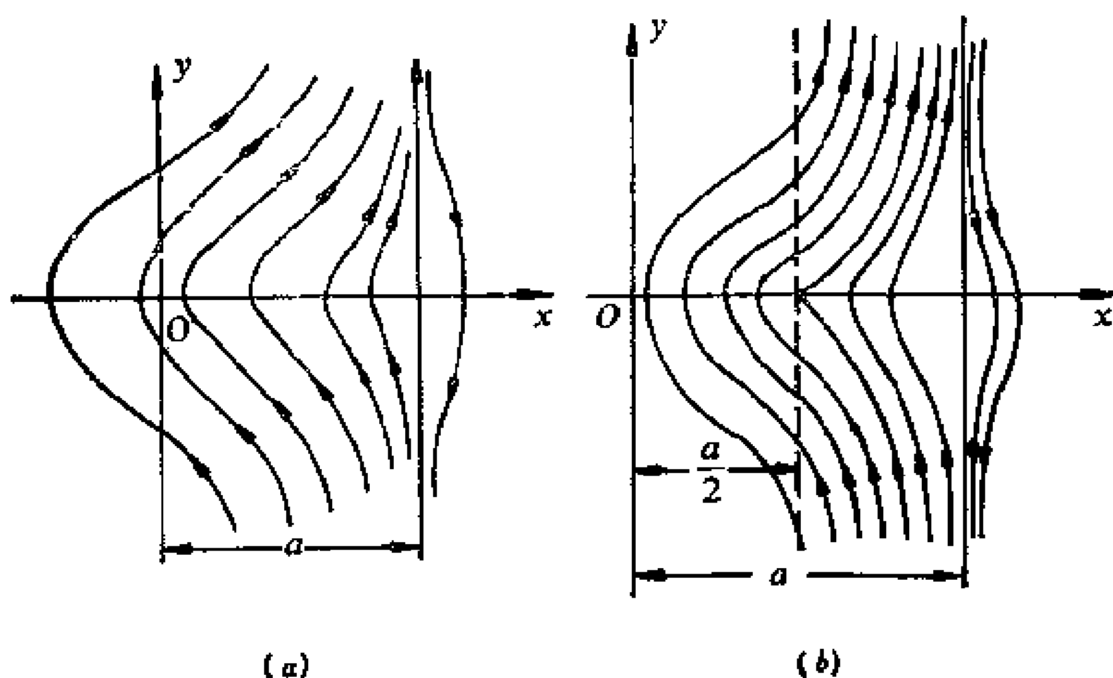


图 8.10

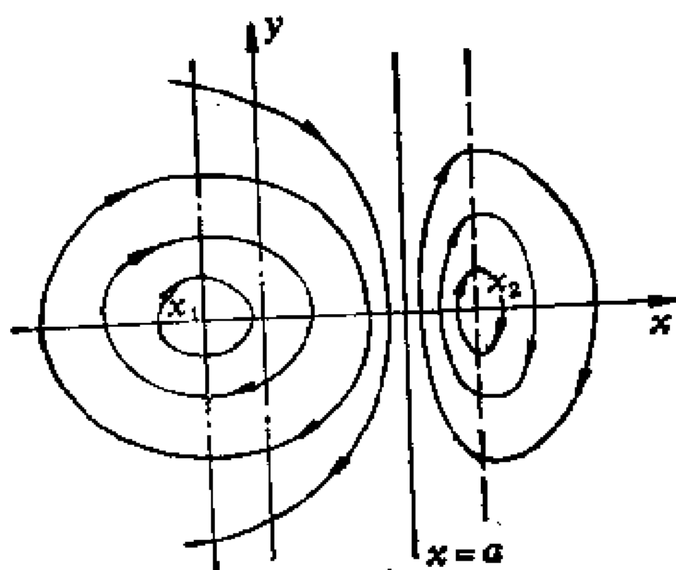


图 8.11

综上所述，当 $0<b<\frac{a^2}{4}$ 及 $b<0$，即参数适合条件

$$8Iil<ka^2,$$

或电流 i 与 I 的方向相反时，长度为 l 的导线将产生振动.

习　　题

1. 设 $\varepsilon>0$. 讨论电子管振荡器的微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0$$

的奇点的类型.

2. 对于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(2x-y)(x-2),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=xy-2,\end{cases}$$

(1) 求出所有的奇点；(2) 判别奇点的类型.

3. 设 a,b 为常数，$a>0,b\neq0$.对于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+y^3,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-b^2x-2ay+x^3,\end{cases}$$

(1) 求出所有的奇点；(2) 判别奇点的类型.

4. 对于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^2+y^2-5,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=xy+2,\end{cases}$$

(1) 求出所有的奇点；(2) 判别奇点的类型.

5. 设微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\alpha x+\beta y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\gamma x+\delta y\end{cases}$$

的奇点(0,0)是中心，试判断微分方程

$$(\gamma x+\delta y)dx+(\alpha x+\beta y)dy=0$$

是否为全微分方程？并说明理由。

6. L-R-C电路中电流的方程为

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}i=0,$$

其中电感 $L>0$，电阻 $R\geqslant 0$，电容 $C>0$。试讨论奇点(0,0)的类型。

7. 对于下列微分方程组，作相图：

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x-3y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=5x-2y;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+2y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x.\end{cases}$

8. 负阻管振荡器电路(图8.12)中，屏极电压满足二阶微分方程

$$\ddot{u}+(r-s)\dot{u}+(1-rs)u=0,$$

其中 r 和 s 是电路参数，$r>0$，$s>0$。试在 $r-s$ 平面上划分奇点类型的区域。

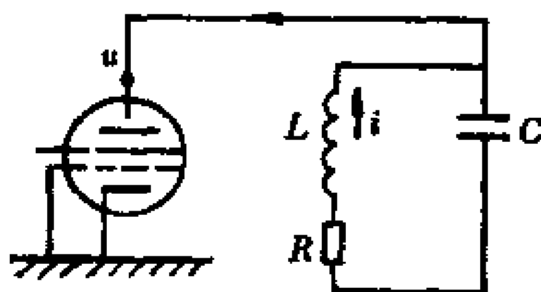


图 8.12

9. 对于线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha x+\beta y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\gamma x+\delta y.\end{cases}$$ 设 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$，$p=-(\alpha+\delta)$，$q=\alpha\delta-\beta\gamma$。

试在 $p-q$ 平面上划分各种类型奇点的分布区域。

10. 某电子管振荡器电路满足微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\mu}[-y-x-k\varphi(x)], \\ \dfrac{dy}{dt}=x. \end{cases}$$

其中参数 $k\geqslant 0, 0<\mu\leqslant\dfrac{1}{4}$，且函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi'(0)=-1$。试在 $k-\mu$ 参数平面上划分奇点的分布区域。

11．对于微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y-2 \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y, \end{cases}$$

(1) 确定奇点及其类型；(2) 求相轨线的直角坐标表达式；(3) 作相图。

12．分别指出图 8.13 和图 8.14 所示相图的错误之处。

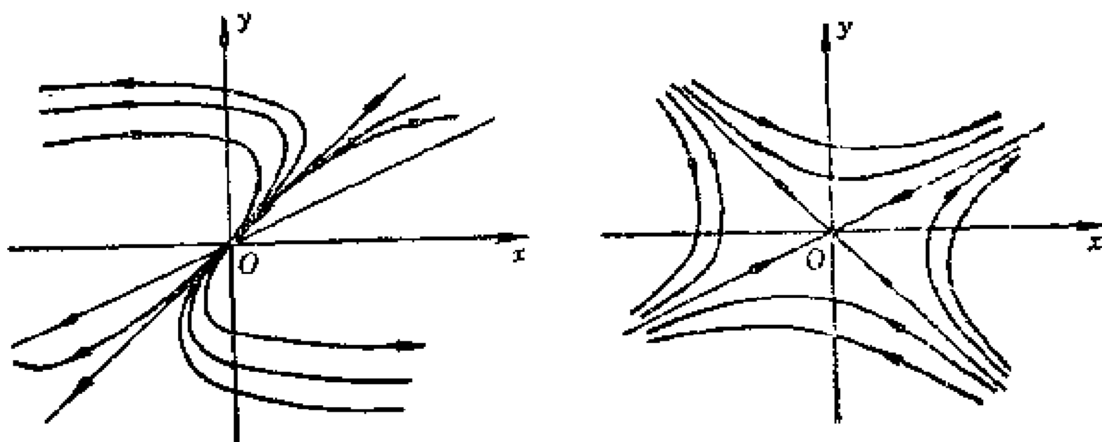


图 8.13

13．证明：奇点(0,0)是微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-y-x\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases}$$

的焦点，但(0,0)是对应的线性系统的中心。

（**提示**：化为极坐标研究。）

§2 电子管阳极调谐振荡器的瑞利方程·极限环

这一节，我们研究在无线电技术中有广泛应用的电子管阳极调谐振荡器的数学模型，说明极限环理论的应用。

一、瑞利方程和范德坡(van der Pol)方程

图 8.15 所示的是阳极调谐振荡器的电路图．图中左上方是一个三极管示意图，三极管有三个极：阳极 a、阴极 k 和栅极 s。栅极和阴极之间的电压为 u_s，栅极电流 $i_s=0$。设线圈的电感为 L，通过阳极、电容器 C 及电感为 L 的线圈的电流分别为 i_a、i_c 和 i_L 根据电路的基尔霍

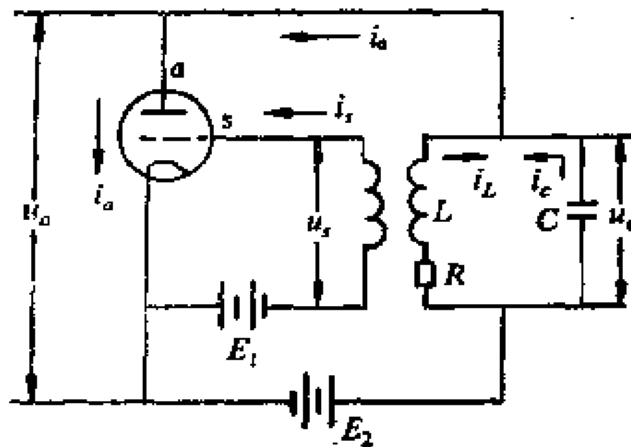


图 8.15

夫定律，得到

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L-\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_c\mathrm{d}t=0, & (1)\\ i_a=i_L+i_c. & (2)\end{cases}$$

(1) 式两边对 t 求导，并利用 (2) 式得

$$\frac{\mathrm{d}^2i_L}{\mathrm{d}t^2}+2n\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+p^2i_L=p^2i_a, \tag{3}$$

其中

$$n=\frac{R}{2L},\qquad p^2=\frac{1}{LC}.$$

板极电流 i_a 与栅压 u_s 的关系为

$$i_a=f(u),\tag{4}$$

其中 $u=u_s-Du_a$，D 是电子管的渗透率。(4)式是电子管的特性曲线，如图8.16所示。

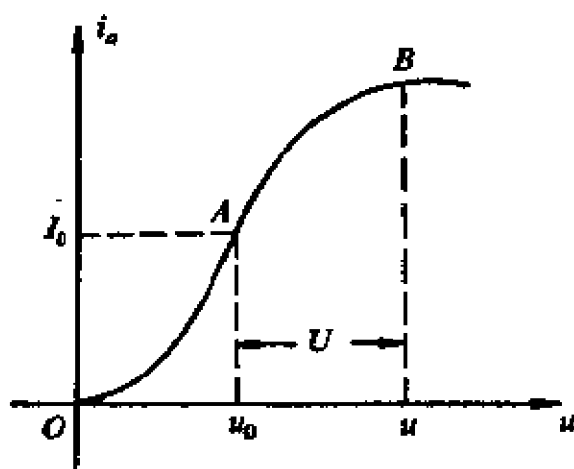


图 8.16

在电子管的工作点 A 的附近，曲线 (4) 可以较好地近似为

$$i_a=I_0+b\left(u-\frac{u^3}{3U^2}\right),\tag{5}$$

从图 8.15 的电路得到

$$u_a=E_2-L\frac{di_L}{dt}-Ri_L.$$

$$u=u_s-Du_a,$$

而栅压等于

$$u_s+E_1=E_1+M\frac{di_L}{dt}.$$

因此，

$$u=(M-DL)\frac{di_L}{dt}-DRi_L-DE_2.$$

通常 DRi_L 及 DE_2 的数值很小，可以忽略不计，于是有

$$u\approx(M-DL)\frac{di_L}{dt}.\tag{6}$$

置

$$x=i_L-I_0,$$

得到

$$\dot{x}=\frac{di_L}{dt},\qquad \ddot{x}=\frac{d^2i_L}{dt^2}.\tag{7}$$

根据(4)、(5)、(6)、(7)式，得到

$$\ddot{x}+p^2x=(\alpha-\beta\dot{x}^2)\dot{x}, \tag{8}$$

其中

$$\alpha=p^2[(M-LD)b-RC],$$
$$\beta=p^2b(M-LD)^3/(3U^2).$$

置 $s=pt,\ \varepsilon=\alpha/p,\ \mu=\beta p^2/\alpha,$

那末方程式(8)化为

$$\frac{d^2x}{ds^2}+x=\varepsilon\left[1-\mu\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right]\cdot\frac{dx}{ds}. \tag{9}$$

如果置 $y=\sqrt{\mu}\,x$，则得到

$$\frac{d^2y}{ds^2}+y=\varepsilon\left[1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]\frac{dy}{ds}. \tag{10}$$

方程式(9)、(10)通常称为瑞利方程。如果我们置

$$x=\sqrt{3}\,y,$$

则方程式(10)化为范德坡方程

$$\frac{d^2x}{ds^2}+x=\varepsilon\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right]\frac{dx}{ds}. \tag{11}$$

二、环域定理的应用

前面研究的电子管振荡器会产生等幅振荡，那末，如何从理论上来解释这一现象呢？这在数学上归结为方程(10)或者(11)存在闭轨线的问题。这里，我们不加证明地介绍一个有广泛应用的环域定理，利用它可以判别闭轨线的存在性。

我们讨论二维的非线性自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y),\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=Q(x,y).\end{cases} \tag{12}$$

定理 1 设 G 是由两条简单闭曲线 Γ_1 和 Γ_2 围成的环域。如果

在环域 G 中没有方程组(12)的奇点，且从 G 的边界上的点出发的轨线都进入(或离开)G，则在环域 G 内至少存在方程组(12)的一条闭轨线(见图 8.17)。

例 1 对于方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-y-\left(x^2+\dfrac{3}{2}y^2\right)x,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y-\left(x^2+\dfrac{1}{2}y^2\right)y,\end{cases}\tag{13}$$

判别是否存在闭轨线。

解 作环域

$$G=\left\{(x,y)\left|\quad \frac{1}{4}\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right.\right\}$$

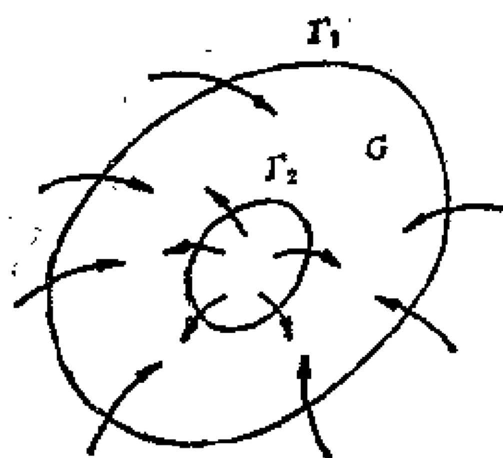


图 8.17

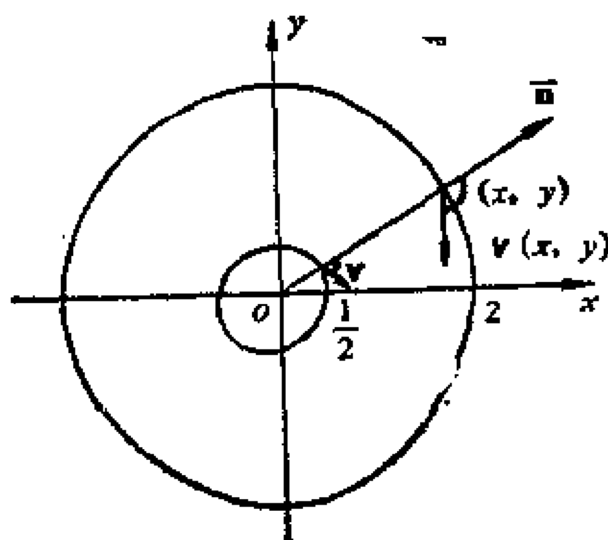


图 8.18

则在 G 中不含方程组(13)的唯一奇点(0,0)(见图 8.18)。

下面，我们考察从 G 的边界上的点出发的轨线的走向．由方程组(13)决定的向量场为

$$\boldsymbol{v}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)),$$

其中
$$P(x,y)=x-y-\left(x^2+\frac{3}{2}y^2\right)x,$$

$$Q(x,y)=x+y-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)y.$$

在边界上(x,y)点处的外法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y)$。从而，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}&=xP(x,y)+yQ(x,y)\\&=x^2+y^2-x^4-\frac{1}{2}y^4-\frac{5}{2}x^2y^2\\&=r^2-r^4\left(\cos^4\theta+\frac{1}{2}\sin^4\theta+\frac{5}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta\right).\end{aligned}$$

在G的内边界$r=\frac{1}{2}$处，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}&=\frac{1}{64}\cos^2 2\theta-\frac{1}{64}\cos 2\theta+\frac{3}{16}\\&=\frac{1}{64}(\cos^2 2\theta-\cos 2\theta+12)>0.\end{aligned}$$

所以，从$r=\frac{1}{2}$上的点出发的轨线，其切向量与边界曲线外法向量$\boldsymbol{n}$的夹角为锐角，因此，轨线进入G内部不再穿出。在G的外边界$r=2$处，有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=4(\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-3)<0.$$

所以，从$r=2$上的点出发的轨线，其切向量与边界曲线外法向$\boldsymbol{n}$的夹角是钝角，因此，轨线也都进入G的内部。根据定理1，G中必定存在方程组(13)的闭轨线。

从例1作的环域G，我们来分析一下，为什么这里选取的Γ_1和Γ_2都是包围原点的闭曲线。事实上，一般地有以下的结果。

定理2 任何闭轨线所包围的单连通区域内，至少包含一个奇点。

由此可知，对于方程组(13)来说，原点$O(0,0)$是唯一的奇点，所以在选取Γ_1和Γ_2作环域G时，我们有意识地选取Γ_1和Γ_2为以原点为中心的圆周，它们都包围原点，同时，对于圆周来说，它们具有易于判别轨线走向的优点。

下面，我们以范德坡方程

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0 \quad (\varepsilon>0) \tag{14}$$

为例，分析一下作环域的全过程，并用环域定理来解决本节一开始所提出的问题。

置 $\dot{x}=y$，得到

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-x-\varepsilon(x^2-1)y. \end{cases} \tag{15}$$

它的奇点是(0,0)。容易计算出(15)对应的线性系统的特征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-4}}{2}.$$

根据§1奇点的分类及裴戎定理，立即可知，当 $0<\varepsilon<2$ 时，奇点(0,0)是不稳定焦点；当 $\varepsilon\geqslant 2$ 时，(0,0)是不稳定结点。

显然，(0,0)是系统(15)的唯一的奇点。现在我们构造一个环域，其内边界曲线取为

$$\Gamma_1:\ x^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

方向场 $\boldsymbol{v}(x,y)=(y,-x-\varepsilon(x^2-1)y)$。在 Γ_1 上 (x,y) 点处的外法向 $\boldsymbol{n}=(x,y)$。类似于例 1，根据

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}&=xy+y[-x-\varepsilon(x^2-1)y]\\&=-\varepsilon(x^2-1)y^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

可知从 Γ_1 上的点出发的轨线都进入 Γ_1 的外部区域。

下面，作环域G 的外边界曲线Γ_2:$ABCDEFGA$(图 8.19)。其中先在 $x=1$ 上选取 A 点，使坐标 $y_A=R$ 充分大；然后，以原点O为中心，OA 为半径作弧 ABC 与 $x=1$ 交于 C 点，再过 C 点作斜率为

$$k_{CD}=\frac{1}{R}+\varepsilon$$

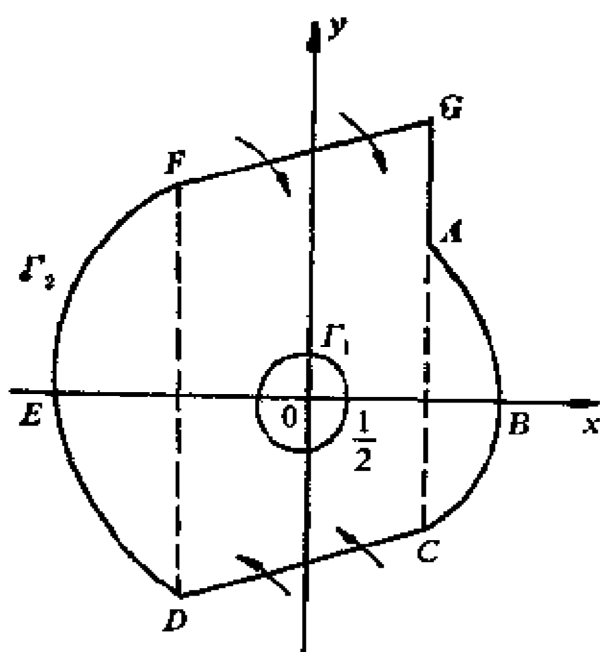


图 8.79

的线段，与直线 $x=-1$ 相交于 D 点；再以 O 点为中心，$\overline{OD}$ 长为半径，作圆弧与 $x=-1$ 交于 F 点；最后，过 F 点，作斜率 $k_{FG}=\frac{1}{R}+\varepsilon=k_{CD}$ 的线段，与直线 $x=1$ 交于 G 点，连结 GA。

现在，需要仔细检验曲线 Γ_2 是否符合要求。

$\overset{\frown}{AC}$： $x^2+y^2=a^2(a>1)$。 在 $\overset{\frown}{AC}$ 上点 (x,y) 处，有

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=-\varepsilon(x^2-1)y^2,$$

由于在 $\overset{\frown}{AC}$ 上 $|x|<1$，又 $\varepsilon>0$，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}<0$，这表示轨线的切向与外法向的夹角为钝角，即轨线进入 G 内部。在 $\overset{\frown}{DF}$ 上的情形，同理可证。

在线段 CD 上，$|x|\leqslant 1$，CD 的斜率 $k_{CD}=\frac{1}{R}+\varepsilon$，而轨线的切线的斜率的绝对值为

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|\leqslant\varepsilon|x^2-1|+\left|\frac{x}{y}\right|$$

$$\leqslant \varepsilon+\frac{1}{y}<\varepsilon+\frac{1}{R}=k_{CD}.$$

又 $\frac{dx}{dt}=y$,在 CD 上, $\dot{x}<0$, 在 FG 上, $\dot{x}>0$, 所以从 CD 及 FG 上点出发的轨线,按图 8.19 所示方向进入 G 的内部。

只剩下 GA 这一段边界曲线了,但是, 从 GA 上的点出发的轨线一定会穿出环域G。事实上,各点的 y 坐标之间有下列关系:

$$y_C=-y_A,$$

$$y_C=y_D+2k_{CD},$$

$$y_F=-y_D, \quad y_G=y_F+2k_{CD}.$$

因此, $y_G=y_A+4k_{CD}>y_A$。而在线段 GA 上, $\frac{dx}{dt}=y>0$,由此可知,轨线必从 GA 穿出环域 G。

为了克服上述困难,我们设法修改环域的外边界 Γ_2,使点 G 位于 A 的下方。首先过 O 点作直线 OE:

$$x+\varepsilon(2\delta+\delta^2)y=0,$$

其中 $\delta>0$ 适合不等式

$$\delta^2+2\delta-\left(1-\frac{1}{\varepsilon R}\right)<0, \qquad 0<\delta<1.$$

直线 OE 与以 O 为中心、OD 为半径的圆弧交于 E 点。然后过 E 作线段 EF 平行于 x 轴, F 点的横坐标为 $-1-\delta$。过 F 作斜率 $k=\varepsilon+\frac{1}{R}$的线段,与直线 $x=1$ 交于 G 点,连接 GA 构成 Γ_2: $ABCDEFGA$ (图 8.20)。

在线段 EF 上, $x\leqslant-1-\delta$, $\quad x^2\geqslant(1+\delta)^2$, 因此

$$\frac{dy}{dt}=-x-\varepsilon(x^2-1)y\leqslant-x-\varepsilon(\delta^2+2\delta)y<0,$$

即轨线从 EF 段进入 G 内部。

在线段 FH 上,由于

$$-2<-1-\delta\leqslant x\leqslant-1,$$

则 $x^2 \leqslant (1+\delta)^2$，或写成

$$x^2-1 \leqslant \delta(\delta+2),$$

从而，有

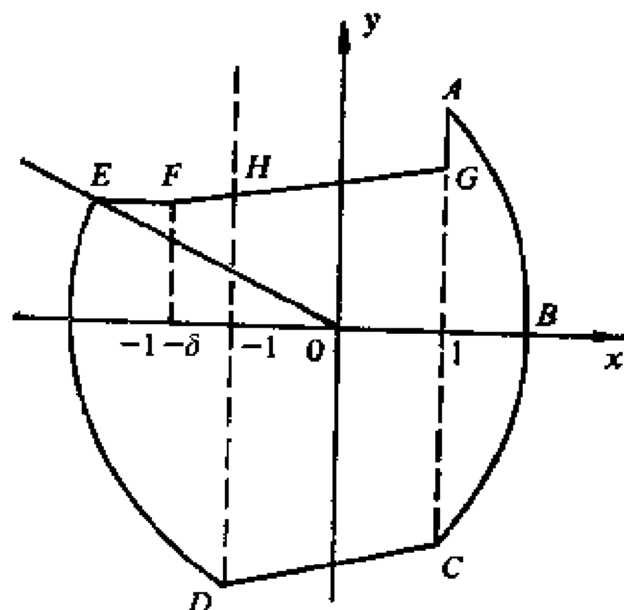


图 8.20

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right| \leqslant \varepsilon|x^2-1| + \frac{|x|}{|y|} \leqslant \varepsilon(\delta+2)\delta + \frac{2}{R} < \frac{1}{R} + \varepsilon = k_{FH}.$$

只要选取 $R>0$ 充分大，不等式

$$\delta^2 + 2\delta - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon R}\right) < 0$$

有解 $\delta>0$。

最后计算 y_G，使 $y_G<y_A$。由于

$$y_G = y_E + (2+\delta)k, \quad x_E^2 + y_E^2 = 1 + y_D^2,$$

$$x_E + \varepsilon(2\delta+\delta^2) - y_E = 0,$$

从而，有

$$y_E = \sqrt{\frac{1+y_D^2}{1+\varepsilon^2\delta^2(\delta+2)^2}}.$$

又
$$y_C = y_D + 2k, \qquad y_C = -y_A,$$

因此，　　$y_D=-(y_A+2k)$，其中 $k=\varepsilon+\frac{1}{R}$。

所以，得到

$$y_G=\sqrt{\frac{1+(y_A+2k)^2}{1+\varepsilon^2(\delta+2)^2\delta^2}}+(2+\delta)k.$$

由于

$$\lim_{y_A\to+\infty}\frac{y_G}{y_A}=\lim_{y_A\to+\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{y_A^2}+\left(1+\frac{2k}{y_A}\right)^2}{1+\varepsilon^2\delta^2(\delta+2)^2}}+\frac{(2+\delta)k}{y_A}<1,$$

所以总可以选取 $y_A=R$ 充分大，使得

$$\frac{y_G}{y_A}<1.$$

这样，G 点位于 A 点下方，在线段 GA 上，$\frac{dx}{dt}=y>0$，从而轨线从 GA 段进入环域 G 的内部。

根据环域定理，在 G 内存在闭轨线。理论上可以证明，方程组(15)的闭轨线是唯一的。由于其证明较繁复，这里略去了。

范德坡方程(11)存在一条孤立的闭轨线。一般地，对于方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=P(x,y),\\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y).\end{cases}\tag{16}$$

称其孤立的闭轨为极限环。

例如，考察二阶系统

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y+x(\sqrt{x^2+y^2}-1)(\sqrt{x^2+y^2}-3),\\ \frac{dy}{dt}=x+y(\sqrt{x^2+y^2}-1)(\sqrt{x^2+y^2}-3).\end{cases}$$

引用极坐标，该方程组化为

$$\frac{dr}{dt}=r(r-1)(r-3),\quad \frac{d\theta}{dt}=1.$$

所以，圆周 $\Gamma_1: r=1, \Gamma_2: r=3$ 都是方程组的闭轨线，由于它们是孤立的闭轨，所以都是极限环。

当 $r<1$ 时，$\frac{dr}{dt}>0$，因此当 $t\to+\infty$ 时 $r\to1$；

当 $1<r<3$ 时，$\frac{dr}{dt}<0$，即当 $t\to+\infty$ 时 $r\to1$，当 $t\to-\infty$ 时，$r\to3$；

当 $r>3$ 时，$\frac{dr}{dt}>0$，即当 $t\to-\infty$ 时，$r\to3$。

三、判别闭轨不存在的方法

下面我们介绍班狄克生(Bendixson)和杜拉克（Dulac）的两个判别法。

定理 3 （班狄克生判别法） 设函数$(P(x,y)$和$Q(x,y)$在单连通区域 G[见图2.21]中存在一阶连续偏导数，且在 G 中

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\neq 0,$$

则方程组(16)在区域G 中不存在闭轨。

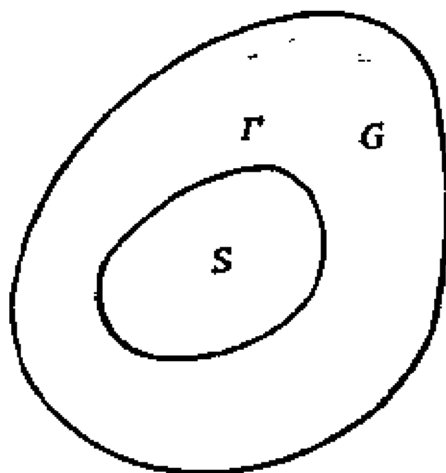


图 8.21

证 假定在 G 中存在闭轨 Γ，Γ 所包围的区域为 S。根据格林公式

$$\oint_\Gamma P(x,y)dy-Q(x,y)dx$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy,$$

在 Γ 上，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Q}{P}$，因此，上面等式的左端等于零，但$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\neq 0$，右式不等于零，得矛盾。

定理 4 （杜拉克判别法） 设存在函数 $B(x,y)$，它和 $P(x,y)$，$Q(x,y)$都在单连通区域 G 中有一阶连续偏导数，且在 G 中成立

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}\neq 0,$$

则方程组(16)在区域 G 中不存在闭轨。

其证明与定理 3 类似，故省略。

例 2 证明方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+ax+b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\alpha x^2-\beta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=0$$

不存在极限环，其中 a,b,α,β 为常数且 $b\neq 0,\beta\neq 0$。

证 等价的微分方程组为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-ax-by+\alpha x^2+\beta y^2.\end{cases}$$

奇点为 $(0,0)$ 和$\left(\frac{a}{\alpha},0\right)$。

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}=-b+2\beta y.$$

根据定理 3，在半平面 $y>\frac{b}{2\beta}$ 及 $y<\frac{b}{2\beta}$ 中都不存在闭轨，但是这并不排除存在与 $y=b/2\beta$ 相交的闭轨的可能性。

置 $$B(x,y)=\mathrm{e}^{mx+ny}.$$

则

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}=\mathrm{e}^{mx+ny}[-b-anx-(bn-m-2\beta)y$$
$$+\alpha nx^2+\beta ny^2],$$

选取 $n=0, m=-2\beta$，即 $B(x,y)=e^{-2\beta x}$，则

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}=-be^{-2\beta x}\neq 0.$$

根据定理 4，在全平面上不存在闭轨，因此不存在极限环。

例 3 设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$，$B(x,y)$ 在环域 D 中具有一阶连续偏导数，且在环域 D 中

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}\neq 0.$$

证明：在环域 D 中方程组 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,y),\end{cases}$ 最多只有一个极限环。

证 首先证明如果存在极限环，它必定包含环域 D 的内边界 Γ_1 在其内部（见图8.22）。

事实上，若用一曲线 L 连结 Γ_1 和外边界曲线 Γ_2，构成一个单连通区域。设极限环 Γ 位于 D 中但不包含 Γ_1 在其内部，则在此单连通区域中

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}\neq 0.$$

由杜拉克判别法知不存在闭轨，得到矛盾。

下面假定在环域 D 中存在两个极限环 $abca$ 和 $a_1b_1c_1a_1$，它们都将 D 的内边界包围在其内部。

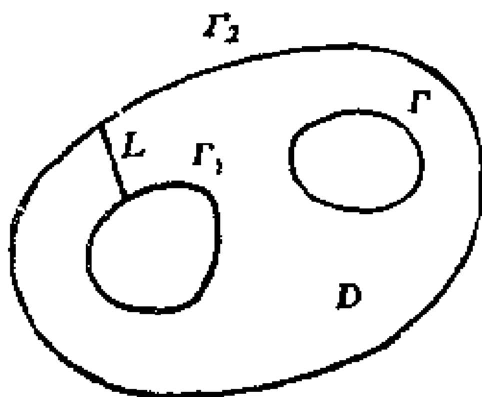


图 8.22

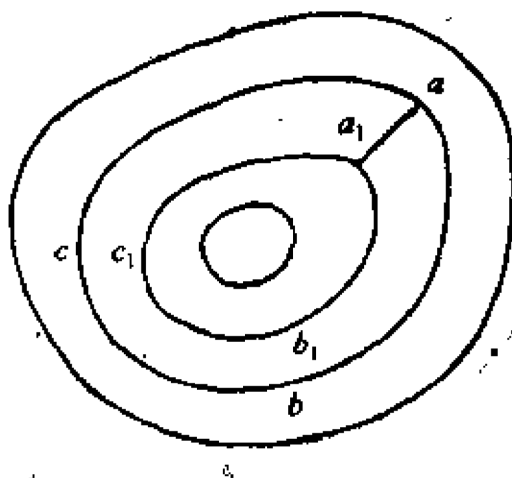


图 8.23

对于闭回路 $\Gamma: abcaa_1c_1b_1a_1a$，如图 8.23 所示，有

$$\oint_{\Gamma} B(P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x) = 0.$$

另一方面，根据格林公式，

$$\oint_{\Gamma} B(P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x) = \iint_{S} \left[\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

左式等于零，而右式不为零，得矛盾。

习　　题

1. 证明：微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y(1 - x^2 - y^2), \end{cases}$$

存在闭轨线。

2. 判别下列微分方程或方程组是否存在闭轨线：

(1) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + y^2, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = xy + 1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + y^3 + x^3, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + y - x^2y; \end{cases}$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3 + x = 0.$

3. 试证：微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - xy^2 + y^4, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2y - x^2y + x^4 \end{cases}$$

没有处于圆 $x^2 + y^2 = 3$ 内的闭轨线。

4. 试证：二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \left[x^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 1\right]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0$$

具有非常数周期解。

5. 对于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(ax+by+c),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=y(a_1x+b_1y+c_1),\end{cases}\quad 设\quad \Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\neq 0.$$

(1) 求出所有的奇点；

(2) *证明：当 $b_1c(a_1-a)+c_1a(b-b_1)\neq 0$ 时，不存在极限环；(3) 证明当 $\Delta=0$ 时不存在闭轨线。

6. 证明：二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-\ln\left[1+\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]-x+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{dx}{dt}\right)=0$$

不存在极限环。

7. 证明：方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(\alpha-\beta x)x+\left(\gamma-\delta\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt}=0$$

不存在极限环。其中 α、β、γ 和 δ 是常数，$\gamma\neq 0$。（**提示**：取 $B(x,y)=\gamma e^{-2\beta x}$，应用杜拉克判据。）

8. 判别下列微分方程组是否存在极限环：

(1) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y^2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2x-ay+bx^2-y^3;\end{cases}$$

(a,b 为常数，$a\neq 0$)

(2) $$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+2x^3-4xy^2,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=-y+4x^2y-3y^3.\end{cases}$$

§3 线性系统周期解的存在性

设 A 是 $n\times n$ 阶常矩阵。现在，我们考虑线性常系数齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x} \tag{1}$$

周期解的存在性。

定理 1 线性常系数齐次方程组(1)存在周期为 $\omega(\omega>0)$ 的周期解的充要条件是:矩阵 A 有特征值 $\lambda=2k\pi\mathrm{i}/\omega(k\in Z)$。

证 因为方程组(1)的初值问题的解是唯一的,所以容易看出,它的解 $\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{At}\boldsymbol{x}(0)$是周期为 ω 的周期解的充要条件为:

$$\boldsymbol{x}(\omega)=\boldsymbol{x}(0),$$

即
$$\mathrm{e}^{A\omega}\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}(0).$$

从而等价于
$$\det[\mathrm{e}^{A\omega}-I]=0,$$

即矩阵 $\mathrm{e}^{A\omega}$ 具有特征值 1,而当 λ 是矩阵 A 的特征值时,$\mathrm{e}^{A\omega}$ 的特征值是 $\mathrm{e}^{\lambda\omega}$。因此,矩阵 A 具有特征值 λ,适合

$$\mathrm{e}^{\lambda\omega}=1,$$

即
$$\lambda=2k\pi\mathrm{i}/\omega,\quad k\in Z.$$

下面我们讨论线性常系数非齐次方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t). \tag{2}$$

定理 2 设矩阵 A 的特征值不等于纯虚数,$\boldsymbol{f}(t)$在$(-\infty,\infty)$上连续,且 $\boldsymbol{f}(t+\omega)=\boldsymbol{f}(t)$,$(t\in(-\infty,\infty))$。则方程组(2)存在唯一的周期为 ω 的周期解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$,且存在函数矩阵 $G(t)$,它在$(-\infty,\infty)$上连续,适合

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|G(t)\|\mathrm{d}t<+\infty,$$

使得

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s. \tag{3}$$

证 矩阵 A 不具有纯虚数的特征值。因此,存在实的 $n\times n$ 阶矩阵 B,使

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

其中矩阵 A_1 的特征值都具有正实部,矩阵 A_2 的特征值都具有负实

部．作变换 $x=By$，根据定理，要证方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=(B^{-1}AB)\boldsymbol{y}+B^{-1}\boldsymbol{f}(t) \tag{4}$$

存在唯一的周期为 ω 的周解 $\boldsymbol{y}(t)$。

置

$$G_0(t)=\begin{cases}\mathrm{diag}(-\mathrm{e}^{A_1t},0), & \text{当 } t<0 \text{ 时},\\ \mathrm{diag}(0,\mathrm{e}^{A_2t}), & \text{当 } t\geqslant 0 \text{ 时},\end{cases}$$

定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}G_0(t-s)B^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\\&=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{diag}(0,\mathrm{e}^{A_2(t-s)})B^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\\&\quad+\int_{t}^{\infty}\mathrm{diag}(-\mathrm{e}^{A_1(t-s)},0)B^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

则显然 $\boldsymbol{q}(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上确定，且适合

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{q}(t)\|&\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\|G_0(t-s)\|\cdot\|B^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{f}(s)\|\mathrm{d}s\\&\leqslant M\left(\int_{-\infty}^{0}\|\mathrm{e}^{A_1t}\|\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\|\mathrm{e}^{A_2t}\|\mathrm{d}t\right),\end{aligned}$$

其中 $M>0$ 为常数．容易验证，$\boldsymbol{q}(t)$ 是周期为 ω 的周期函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}(t+\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}G_0(t+\omega-s)B^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\\&\xlongequal{(\text{令}s=u+\omega)}\int_{-\infty}^{+\infty}G_0(t-u)B^{-1}\boldsymbol{f}(u+\omega)\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}G_0(t-u)B^{-1}\boldsymbol{f}(u)\mathrm{d}u=\boldsymbol{q}(t),\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}&=\begin{pmatrix}0&0\\0&I_2\end{pmatrix}B^{-1}\boldsymbol{f}(t)+\int_{-\infty}^{t}\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&\mathrm{e}^{A_2(t-s)}\end{pmatrix}B^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\\&\quad+\begin{pmatrix}I_1&0\\0&0\end{pmatrix}B^{-1}\boldsymbol{f}(t)-\int_{t}^{+\infty}\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{A_1(t-s)}&0\\0&0\end{pmatrix}B^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\\&=(B^{-1}AB)\boldsymbol{q}(t)+B^{-1}\boldsymbol{f}(t),\end{aligned}$$

其中 I_1, I_2 都是单位阵，其阶数分别与 A_1 和 A_2 的阶数相同。因此，$\boldsymbol{q}(t)$适合方程组(4)。

置

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=B\boldsymbol{q}(t) \qquad G_0(t)=BG_0(t)B^{-1},$$

则 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是方程组(2)的周期为 ω 的周期解，且

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\,.$$

现在，进一步研究变系数线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t) \tag{5}$$

周期解的存在性。通常，称方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=-A(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x} \tag{7}$$

的共轭方程组。

定理 3 设 n 阶函数方阵 $A(t)$ 和 n 维函数向量 $\boldsymbol{f}(t)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$内是连续的，且

$A(t+\omega)=A(t)$, $\boldsymbol{f}(t+\omega)=\boldsymbol{f}(t)$ $(t\in(-\infty,\infty))$.

则方程组(5)存在周期 ω 的周期解的充要条件为：对于共轭方程组(6)的任何周期 ω 的周期解 $\boldsymbol{y}(t)$，适合

$$\int_0^{\omega}\boldsymbol{y}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t=0. \tag{8}$$

证 设 $\Phi(t)$是方程组(7)的基本解方阵。根据常数变易公式，方程组(5)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s. \tag{9}$$

因为 $A(t)$ 和 $\boldsymbol{f}(t)$在$(-\infty,\infty)$上连续，所以方程组(5)的初值问题的解是唯一的。因此，解 $\boldsymbol{x}(t)$是周期 ω 的周期解的充要条件是：

$$\boldsymbol{x}(\omega)=\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0.$$

利用(9)，即

$$[\Phi(\omega)-I]\boldsymbol{x}_0=-\int_0^{\omega}\Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,$$

或者线性代数方程组

$$[\Phi^{-1}(\omega)-I]\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{a} \tag{10}$$

具有非零解，其中

$$\boldsymbol{a}=\int_0^{\omega}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s.$$

首先，我们证明，方程组(10)存在非零解 $\boldsymbol{x}_0$ 的充要条件是：对于一切适合 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}[I-\Phi(\omega)]=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ 的 $\boldsymbol{\eta}$，成立

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=0. \tag{11}$$

事实上，由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\Phi^{\mathrm{T}}(t)\cdot[\Phi^{\mathrm{T}}(t)]^{-1}\}=0,$$

得到

$$\Phi^{\mathrm{T}}(t)A^{\mathrm{T}}(t)[\Phi^{\mathrm{T}}(t)]^{-1}+\Phi^{\mathrm{T}}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Phi^{\mathrm{T}}(t)]^{-1}=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Phi^{\mathrm{T}}(t)]^{-1}=-A^{\mathrm{T}}(t)[\Phi^{\mathrm{T}}(t)]^{-1},$$

因此，$[\Phi^{\mathrm{T}}(t)]^{-1}$ 是共轭方程组(6)的基本解方阵。方程组(6)的周期为 ω 的周期解 $\boldsymbol{y}(t)$ 可以表示成

$$\boldsymbol{y}(t)=[\Phi^{\mathrm{T}}(t)]^{-1}\boldsymbol{y}(0).$$

置 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{y}(0)$，根据 $\boldsymbol{y}(t)$ 是 ω 周期解，$\boldsymbol{y}(\omega)=\boldsymbol{y}(0)$，得到

$$\boldsymbol{\eta}=[\Phi^{\mathrm{T}}(\omega)]^{-1}\boldsymbol{\eta},$$

即
$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}[I-\Phi(\omega)]=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}},$$

因此
$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=0.$$

再利用关系式(11)与(8)等价，即得证。

定理 4 设 $n\times n$ 阶函数矩阵 $A(t)$ 和 n 维函数向量 $\boldsymbol{f}(t)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上连续，且

$$A(t+\omega)=A(t),\ \boldsymbol{f}(t+\omega)=\boldsymbol{f}(t)\quad (t\in(-\infty,\infty)).$$

如果共轭方程组(6)不存在周期 ω 的周期解，则方程组(5)存在唯一的周期为 ω 的周期解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$，且

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=\int_t^{t+\omega}[\Phi(s)(\Phi^{-1}(\omega)-I)\Phi^{-1}(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s, \tag{12}$$

其中 $\Phi(t)$ 是方程组(7)的基本解方阵。

证 共轭方程组(6)不存在周期为 ω 的周期解，因此，矩阵 $\Phi^{-1}(\omega)-I$ 是非奇异阵．根据常数变易公式，方程组(5)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s.$$

根据定理 3 的证明，当$[\Phi^{-1}(\omega)-I]^{-1}$ 存在时，方程组(10)存在唯一非零解

$$\boldsymbol{x}_0^*=[\Phi^{-1}(\omega)-I]^{-1}\int_0^\omega\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,$$

即方程组(5)存在唯一的周期为 ω 的周期解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}(t)&=\Phi(t)\boldsymbol{x}_0^*+\int_0^t\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\\
&=\Phi(t)[\Phi^{-1}(\omega)-I]^{-1}\int_0^\omega\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s+\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\\
&=\Phi(t)\left\{[\Phi^{-1}(\omega)-I]^{-1}\left[\int_0^\omega\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\int_0^t(\Phi^{-1}(\omega)-I)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\right]\right\}\\
&=\Phi(t)[\Phi^{-1}(\omega)-I]^{-1}\left(\int_0^\omega\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\right.\\
&\qquad\left.+\int_0^t[\Phi^{-1}(\omega+s)-\Phi^{-1}(s)]\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\right)\\
&=\Phi(t)[\Phi^{-1}(\omega)-I]^{-1}\left(\int_t^\omega\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\right.\\
&\qquad\left.+\int_\omega^{t+\omega}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s-\omega)\mathrm{d}s\right)\\
&=\Phi(t)[\Phi^{-1}(\omega)-I]^{-1}\int_t^{t+\omega}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$=\int_t^{t+\omega}[\Phi(s)(\Phi^{-1}(\omega)-I)\Phi^{-1}(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s.$$

下面，我们研究线性系统(5) 存在 ω 周期解与存在有界解之间的关系。

定理 5 设 $A(t)$是定义在$(-\infty,\infty)$上的 $n\times n$ 阶连续函数矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$是定义在$(-\infty,\infty)$上的连续 n 维函数向量，且 $A(t+\omega)=A(t)$，$\boldsymbol{f}(t+\omega)=\boldsymbol{f}(t)$. 则方程组 (5) 存在周期为 ω 的周期解的充要条件是：(5)存在解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$，它在$(-\infty,\infty)$上有界.

证 不妨设 $\boldsymbol{f}(t)\neq\boldsymbol{0}$。必要性是显然的，下面证明充分性。首先，$\boldsymbol{x}(t)$是方程组(5)的非零 ω 周期解的充要条件为：

$$\boldsymbol{x}(\omega)=\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}. \tag{13}$$

设 $\Phi(t)$ 是方程组(6)的基本解方阵 $\Phi(0)=I$，I 为单位阵，则

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{q}(t), \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{q}(t)=\int_0^t\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s.$$

从而，条件(13)等价于关于 $\boldsymbol{x}_0$ 的线性代数方程组

$$[\Phi(\omega)-I]\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{q}(\omega)=\boldsymbol{0} \tag{15}$$

存在非零解$\boldsymbol{x}_0$。

设方程组(5)存在有界解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$，在$(-\infty,\infty)$上定义。假定方程组 (5) 不存在周期为 ω 的周期解，则方程组(15)不存在非零解$\boldsymbol{x}_0$。因此，有

$$\det[\Phi(\omega)-I]=0,$$

且存在向量 $\boldsymbol{z}$，适合

$$\begin{cases}[\Phi(\omega)-I]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(\omega)\neq 0.\end{cases} \tag{16}$$

不妨假设 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(\omega)>0$。置

$$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\varphi}(k\omega)\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

根据 $\boldsymbol{\varphi}(t+k\omega)=\Phi(t)\boldsymbol{\varphi}(k\omega)+\boldsymbol{q}(t)$，得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \Phi(\omega)\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{q}(\omega), \\ \boldsymbol{x}_2 = \Phi(\omega)\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{q}(\omega) = \Phi^2(\omega)\boldsymbol{x}_0 + (\Phi(\omega) + I)\boldsymbol{q}(\omega), \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}_k = \Phi^k(\omega)\boldsymbol{x}_0 + [\Phi^{k-1}(\omega) + \cdots + \Phi(\omega) + I]\boldsymbol{q}(\omega). \end{cases}$$

从条件(16)，得到　$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\Phi(\omega) = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}$。因此，有

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0 + k\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(\omega) \to +\infty \qquad (\text{当 } k \to +\infty \text{时})。$$

而另一方面，$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leqslant H, t \in (-\infty, \infty)$，从而又有

$$|\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k| = |\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(k\omega)| \leqslant |\boldsymbol{z}| \cdot H。$$

得到矛盾。

习　　题

1. 设函数 $f(t)$ 是周期为 π 的连续函数。试问函数 $f(t)$ 适合什么条件时，微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x\cos^2 t - y\sin^2 t + f(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x\sin^2 t - y\cos^2 t, \end{cases}$$

存在周期为 π 的周期解？

(提示：应用定理 3。)

2. 参数 a 和 b 为何值时，下列微分方程组存在周期为 ω 的周期解？

(1) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + by, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + ay; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a^2 y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -bx + ay. \end{cases}$

3. 证明：微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(1 + \sin^2 t) + y\cos^2 t + f(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x\cos^2 t + y(1 + \sin^2 t) + g(t) \end{cases}$$

存在唯一的周期为 π 的周期解。已知：函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $-\infty < t < \infty$ 上连续，且 $f(t + \pi) = f(t), g(t + \pi) = g(t)$。

（**提示**：先求出相应的共轭方程组的通解，然后利用定理 4。）

4. 设方阵值函数 $A(t)$ 是周期为 ω 的连续函数，$\Phi(t)$ 是线性方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}$$

的基本解方阵。试证该方程组的一切解都是周期 ω 的周期解的充要条件是：

$$\Phi(0) = \Phi(\omega).$$

（**提示**：利用通解的表达式及解的唯一性。）

第九章　稳定性理论与应用

§1　稳定性的概念

这一章，我们研究常微分方程解的稳定性问题，它有广泛的应用，例如，设计一个控制系统，首先必须解决系统的稳定性，然后才能考虑系统的其他品质指标。为了弄清稳定性概念，先看两个例子。

例 1　有阻尼的弹簧质量系统及倒摆。

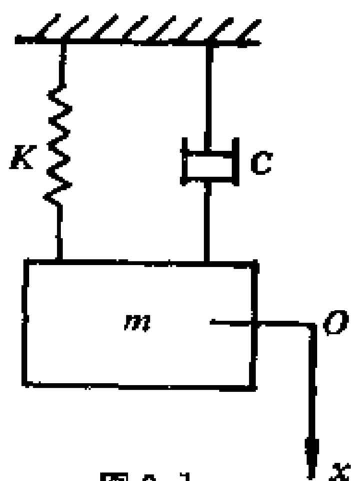


图 9.1

考虑图 9.1 所示的弹簧质量系统，取其静平衡位置为坐标原点。

现在给质量为 m 的物体一个"初始扰动"，例如，在初始时刻把质量块往下拉一下，突然松手，或初始时给以一个冲击力。这里，扰动是指瞬态的，即在初始扰动之后没有其他扰动。如果初始扰动不大，那末物体将在原来的平衡位置附近振动，经过很长一段时间后，仍停留在原来的平衡位置上。力学上称这种平衡状态是稳定的(而且是渐近稳定的)，这里"渐近"包含逐渐接近原平衡位置的意思。

图 9.2 表示质量为m的物体的振动位移。

再来看一个倒置的单摆(图9.3)，初始时处于铅垂平衡位置。它在受到初始的微小扰动(不管怎样小)后，将偏离原来的平衡位置，而永远不会回到原平衡状态。力学上将这种平衡位置称为不稳定的。

例 2　几种初等奇点的稳定性

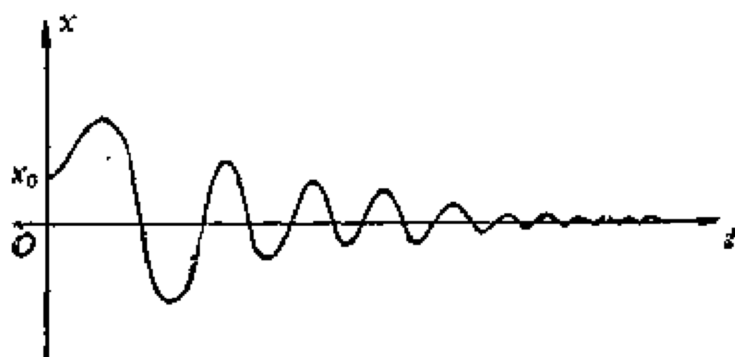


图 9.2

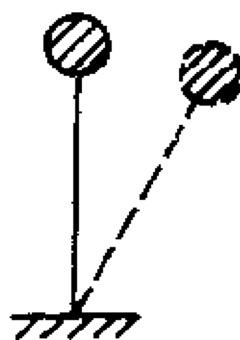
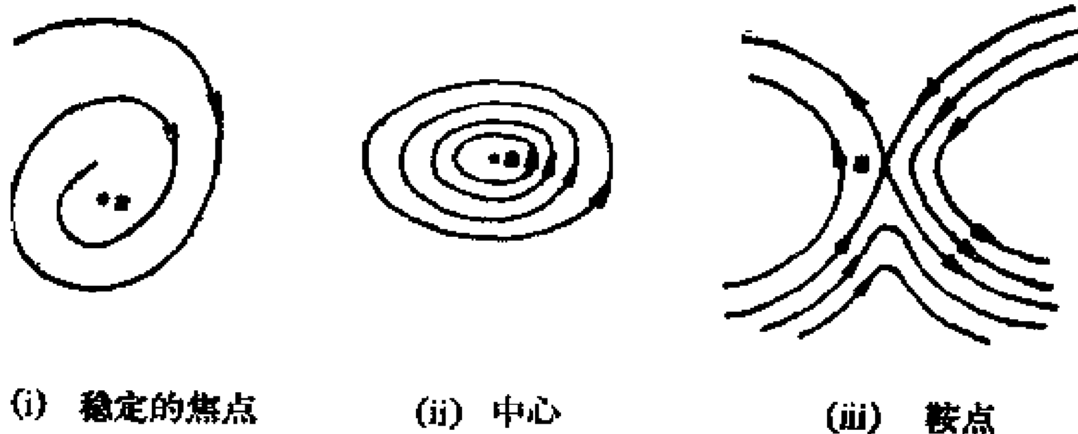


图 9.3

在第八章我们讨论了初等奇点的分类。图 9.4 表示的是几种初等奇点 $\boldsymbol{a}$。



(i) 稳定的焦点　　(ii) 中心　　(iii) 鞍点

图 9.4　几种初等奇点

对于稳定的焦点 $\boldsymbol{a}$，当初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 偏离不大时，从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的轨线 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 将进入 $\boldsymbol{a}$ 的邻域，并趋向于 $\boldsymbol{a}$。奇点 $\boldsymbol{a}$ 所对应的平衡位置，与例 1 中的有阻尼弹簧质量系统的平衡位置 $x=0$ 具有相同的性质，即是渐近稳定的。对于中心 $\boldsymbol{a}$，只要初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 偏差不大，那末从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的轨线 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 将一直停留在 $\boldsymbol{a}$ 的小邻域内，与前述情形差别在于它最终不趋于 $\boldsymbol{a}$，这种平衡位置 $\boldsymbol{a}$ 与例 1 中弹簧质量系统（不考虑阻尼）的平衡位置 $x=0$ 相同，称为是稳定的。

鞍点的情形不同，在奇点 $\boldsymbol{a}$ 的无论怎样小的邻域内，总有这样的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，从 $\boldsymbol{x}_0$ 出发的轨线 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 将偏离 $\boldsymbol{a}$ 很大，这与例 1 中倒摆的平衡位置相同，也称为不稳定的。

用微分方程的数学模型描述一个实际系统的状态，通常归结为一个初值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\\
\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0.
\end{cases}
\tag{1}
$$

由于初始数据 x_0 一般通过测量得到，不可避免有误差．我们关心的是，初始数据的微小变化，是否对解的影响也微小．否则如果初始数据"差之毫厘"，使以后的状态"失之千里"，那末这个数学模型就无法使用．另一方面，初始数据 x_0 在实际问题中表示一个系统的初始状态，在系统工作过程中，由于外界各种因素的干扰，可能会产生一个"初始的扰动"，即产生初始偏差，我们希望初始的扰动不会引起系统的状态偏离正常工作状态很远，这样，才能使系统正常工作．那末怎样才能保证做到这一点呢？

实际问题中提出的上述课题，用数学的语言来描述，就是微分方程初值问题(1)的解 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 是否连续依赖于初值 $\boldsymbol{x}_0$？

一、解关于初值的连续依赖性

设初值问题(1)的解 $x=\varphi(t;t_0,x_0)$，在$[t_0,t_0+T]$上存在．如果初始值有误差，变成 $\bar{x}_0$，我们所关心的是解关于初值 x_0 是否连续依赖，即解 $\varphi(t;t_0,\bar{x}_0)$与 $\varphi(t;t_0,x_0)$在$[t_0,t_0+T]$ 上是否相差不大．用 $\varepsilon-\delta$ 的语言来描述，就是对于任意给定的 $\varepsilon>0$，是否存在 $\delta>0$，使得当 $|\bar{x}_0-x_0|<\delta$ 时，以$(t_0,\bar{x}_0)$为初值的解 $\varphi(t;t_0,\bar{x}_0)$在$[t_0,t_0+T]$上存在，且适合

$$|\varphi(t;t_0,\bar{x}_0)-\varphi(t;t_0,x_0)|<\varepsilon \quad (t\in[t_0,t_0+T]).$$

换句话说，式

$$\lim_{x_0\to\bar{x}_0}\varphi(t;t_0,x_0)=\varphi(t;t_0,\bar{x}_0)$$

是否关于 $t\in[t_0,t_0+T]$一致地成立．

显然，如果初值问题的解不满足唯一性，那末虽然初值 $x_0=\bar{x}_0$，但解 $\varphi(t;t_0,\bar{x}_0)$与 $\varphi(t;t_0,x_0)$ 在 $[t_0,t_0+T]$ 上可以相差很大（参看图

9.5)。

由此可见，解关于初值 x_0 连续依赖的必要条件是初值问题的解是唯一的。反之，结论也是正确的，即一般地，我们有下列结果。

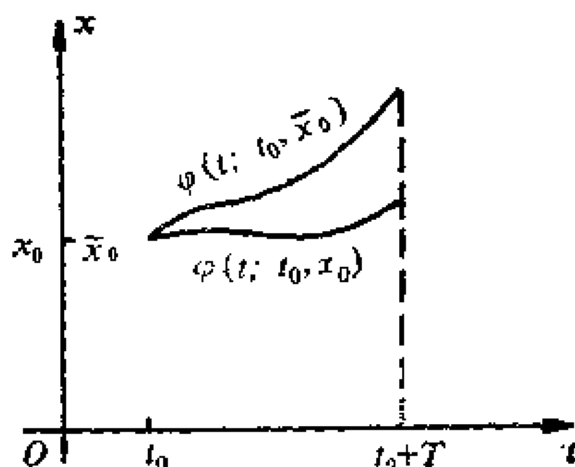


图 9.5

定理 1 初值问题(1)的解 $\varphi(t;t_0,x_0)$关于初始值(t_0,x_0)连续的充分必要条件是：初值问题(1)的解存在且唯一。

这里需要强调指出的是，我们所讨论的解 $\varphi(t;t_0,x_0)$ 关于初值的连续依赖性，都是在某个有限闭区间$[t_0,t_0+T]$上论证的。

下面，我们给出一个估计式，可以用来估计出由于初始值 x_0 的误差以及方程右端函数的误差，所产生的解的误差。

定理 2 设函数 $f(t,x)$和 $g(t,x)$在闭矩形区域 $\bar{R}$: $|t-t_0|\leqslant a$, $|x-x_0|\leqslant b$ 上连续，$x(t)$和 $y(t)$分别是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(t,y)\\ y(t_0)=y_0\end{cases}$$

的解，在$[t_0-h,t_0+h]$上存在，且当 $(t,x),(t,y)\in\bar{R}$ 时，成立

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant N|x-y|,$$
$$|g(t,x)-f(t,x)|\leqslant M,$$

且
$$|x_0-y_0|\leqslant\delta,$$

其中 M,N 和 δ 都是正常数，则当 $t\in[t_0-h,t_0+h]$时，有

$$|x(t)-y(t)| \leqslant \delta e^{N|t-t_0|}+\frac{M}{N}(e^{N|t-t_0|}-1).$$

在证明定理 2 之前，先介绍一个推广的格朗瓦尔不等式，其证明留给读者作为练习。

引理 设 $x(t)$, $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且当 $t\in[a,b]$ 时，$g(t)\geqslant 0$，又

$$x(t)\leqslant f(t)+\int_a^t g(s)x(s)\mathrm{d}s,$$

则当 $t\in[a,b]$ 时，成立

$$x(t)\leqslant f(t)+\int_a^t g(s)f(s)e^{\int_s^t g(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s.$$

定理 2 的证明

我们只考察 $t_0\leqslant t\leqslant t_0+h$ 的情形，$t_0-h\leqslant t\leqslant t_0$ 情形类似可证。显然，$x(t)$ 和 $y(t)$ 分别满足下列积分方程

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=x_0+\int_{t_0}^t f(s,x(s))\mathrm{d}s,\\ y(t)&=y_0+\int_{t_0}^t g(s,y(s))\mathrm{d}s,\end{aligned}\right\}\quad t\in[t_0,t_0+h].$$

因此，我们有

$$x(t)-y(t)=x_0-y_0+\int_{t_0}^t [f(s,x(s))-g(s,y(s))]\mathrm{d}s,$$

从而

$$\begin{aligned} |x(t)-y(t)| &\leqslant |x_0-y_0|+\int_{t_0}^t |f(s,x(s))-g(s,y(s))|\mathrm{d}s\\ &\leqslant \delta+\int_{t_0}^t[|f(s,x(s))-f(s,y(s))|+|f(s,y(s))-g(s,y(s))|]\mathrm{d}s\\ &\leqslant \delta+\int_{t_0}^t[N|x(s)-y(s)|+M]\mathrm{d}s\\ &=\delta+M(t-t_0)+N\int_{t_0}^t|x(s)-y(s)|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

利用格朗瓦尔不等式，得到

$$|x(t)-y(t)|\leqslant \delta+M(t-t_0)+\int_{t_0}^t N[\delta+M(s-t_0)]e^{\int_s^t N\mathrm{d}u}\mathrm{d}s$$

$$=\delta e^{N(t-t_0)}+\frac{M}{N}[e^{N(t-t_0)}-1],\quad t_0\leqslant t\leqslant t_0+h.$$

当 $t_0-h\leqslant t\leqslant t_0$ 时，类似可证

$$|x(t)-y(t)|\leqslant\delta e^{N(t_0-t)}+\frac{M}{N}(e^{N(t_0-t)}-1).$$

因此，得到

$$|x(t)-y(t)|\leqslant\delta e^{N|t-t_0|}+\frac{M}{N}[e^{N|t-t_0|}-1],\ t\in[t_0-h,t_0+h].$$

在实际问题中，常常需要知道解 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在无穷区间 $[t_0,+\infty)$ 上是否连续依赖于初值 $\boldsymbol{x}_0$，即要考虑初始扰动对解的长时间影响问题，这就是下面要研究的稳定性问题。

二、李雅普诺夫意义的稳定性

考察微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}).\tag{2}$$

设 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{o})\equiv\boldsymbol{o},\boldsymbol{f}\in C(R^+\times D,\ R^n),D\subseteq R^n,R^+=[0,+\infty)$。下面首先给出方程组(2) 的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 在李雅普诺夫意义下的稳定性的确切定义。

定义 1 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 及 $t_0\in R^+$，存在 $\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta(t_0,\varepsilon)$时，方程组(2)以$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$为初值的解 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在$(t_0,+\infty)$上存在，且满足

$$\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon\qquad(\forall t\in[t_0,+\infty)),$$

则称方程组(2)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 是稳定的。

显然，零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 稳定就是等式

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}_0\|\to 0}\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|=0$$

在$[t_0,+\infty)$上关于 t 一致地成立。

定义 2 若方程组(2)的解满足

（i）零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的；

(ii) 存在 $\delta>0$,使得当 $\|x_0\|<\delta$ 时,有

$$\lim_{t\to+\infty} x(t;t_0,x_0)=0,$$

则称方程组(2)的零解 $x=0$ 是渐近稳定的。

定义 3 如果存在 $\varepsilon_0>0$,不管 $\delta>0$ 怎样小,总存在 x_0^*,虽然 $\|x_0^*\|<\delta$,但是方程组(2)的以 (t_0,x_0^*) 为初值的解 $x(t;t_0,x_0^*)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上不存在,或者存在 $t^*>t_0$,使得

$$\|x(t^*;t_0,x_0^*)\|\geqslant\varepsilon_0,$$

则称方程组(2)的零解是不稳定的。

一般地,若 $f(t,a)=0$,则称 $x=a$ 是方程组(2)的平衡位置。若 a 是(2)的平衡位置,我们可以作变换

$$y=x-a,$$

将方程组(2)化为

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y+a)\triangleq F(t,y). \tag{3}$$

$y=0$ 是(3)的平衡位置。于是,讨论一般的平衡位置的稳定性问题转化为讨论零解的稳定性问题。

下面,给出某个特解 $x=\varphi(t)$ 在李雅普诺夫意义下稳定性的 $\varepsilon-\delta$ 表示:

对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 及 $t_0\geqslant0$,如果存在 $\delta(t_0,\varepsilon)>0$,使得当 $\|x_0-\varphi(t_0)\|<\delta(t_0,\varepsilon)$ 时,方程组(2)的以 (t_0,x_0) 为初值的解 $x(t;t_0,x_0)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上存在,且适合

$$\|x(t;t_0,x_0)-\varphi(t)\|<\varepsilon \qquad (t\in[t_0,\infty)),$$

则称解 $x=\varphi(t)$ 在李雅普诺夫意义下是稳定的。

类似地,可以写出解 $x=\varphi(t)$ 在李雅普诺夫意义下渐近稳定、不稳定的 ε-δ 表示。

习 题

1. 用 ε-δ 语言写出解 $x=\varphi(t)$ 在李雅普诺夫意义下渐近稳定和不稳定的定义。

2. 设 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 是微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y\sin^2 t+\frac{1}{1+t},$$

$$\frac{dy}{dt}=x\sin^2 t+e^t\cos t,$$

的解，利用解的稳定性的定义证明上述解是稳定的。

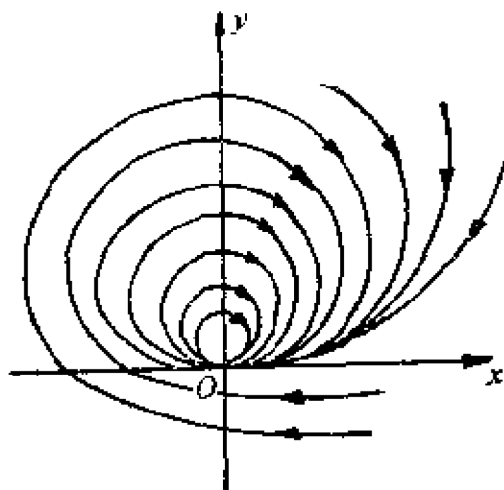


图 9.6

3. 右图 9.6 所示的是微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x,y),$$

的相图。$P(0,0)=Q(0,0)=0$，且 P、Q、P'_x、P'_y、Q'_x、Q'_y 都连续。

(1) 当 $t\to+\infty$ 时，解具有什么性质？

(2) 该方程组的零解在李雅普诺夫意义下是否渐近稳定？是否稳定？

4. 下列命题是否成立："如果线性微分方程组 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t)$ 的某一个解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)$ 在李雅普诺夫意义下是稳定的，则该方程组的任何解都是稳定的"。

5. 利用李雅普诺夫关于解的稳定性的定义，判别下列初值问题的解是否稳定？

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=t-x,\\ x(0)=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x-x^3}{2t},\\ x(1)=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\ddot{x}+2x+2\dot{x}=0,\\ x(0)=\dot{x}(0)=0;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ay,\\ \dfrac{dy}{dt}=ax,\\ x(0)=y(0)=0,\end{cases}$　　(a为实常数)。

6. 已知微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x,y)$$

中，$P(0,0)=Q(0,0)=0$，且通解为 $x=\frac{C_1+C_2t}{1+t^2}$，$y=(C_1t^3+C_2)e^{-2t}$，其中C_1，C_2为任意常数。试判别零解的稳定性。

7. 设二阶微分方程$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right)$的通解为

$$x(t)=t^{-\frac{1}{4}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{4}\ln t+C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{4}\ln t\right).$$

试判别零解的稳定性。

§2 线性系统零解的稳定性

下面，我们讨论线性系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x},\qquad t\geqslant 0 \tag{1}$$

和

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t)\boldsymbol{x},\quad t\geqslant t_0\geqslant 0 \tag{2}$$

的零解的稳定性。

首先，对于常系数线性系统(1)，其零解的稳定性可用下列判据来判别。

定理 1 1) 如果常值矩阵 A 存在一个特征根 λ^*，$\mathrm{Re}\lambda^*>0$，则方程组(1)的零解是不稳定的；

2) 如果 $\mathrm{Re}\,\lambda(A)\leqslant 0$，且对应于 $\mathrm{Re}\,\lambda=0$ 的特征根的初等因子是单重的，则方程组(1)的零解是稳定的，但不是渐近稳定的；

(3) 如果 $\mathrm{Re}\,\lambda(A)\leqslant 0$，且 $\mathrm{Re}\,\lambda=0$ 的特征根对应的初等因子是多重的，则(1)的零解是不稳定的；

(4) 方程组(1)的零解是渐近稳定的充分必要条件为：$\mathrm{Re}\,\lambda(A)<0$。

证 方程组(1)以$(0,\boldsymbol{x}_0)$为初值的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0. \tag{3}$$

设存在满秩阵 T，使 $T^{-1}AT=J$，其中

$$J=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s),$$

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i\times k_i}$$

而

$$e^{J_i t}=e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & \dfrac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$e^{At}=T\mathrm{diag}(e^{J_1 t}\cdots e^{J_s t})T^{-1}. \tag{4}$$

从解的表达式(3)及(4)式，容易看出：

1) 解的分量是形如 $t^{p_i}e^{\lambda_i t}$ 的项的线性组合，数 p_i 至多为 $n-1$；如果 λ_i 属于单重初等因子，则 p_i 等于 0。

2) 若 $\mathrm{Re}\lambda_i>0$，则总有解是无界的，因此不稳定。

3) 设 $\mathrm{Re}\,\lambda(A)\leqslant 0$，若 $\lambda=\pm i\omega$ 的初等因子为是单重的，则根据 1)，只有 $e^{i\omega t}$ 的项包含在相应的解的分量中，它们是有界的，若 $\lambda=\pm i\omega$的初等因子是多重的，则解的分量中出现 $t^p e^{i\omega t}$ 的项 ($p>0$)，是无界的。如果一切项有界，则

$$\|x(t)\|\leqslant\|T\|\|e^{Jt}\|\|T^{-1}\|\|x_0\|.$$

因此，零解是稳定的，但由于出现 $e^{i\omega t}$，零解不是渐近稳定的。

4) 不难证明，当 $\mathrm{Re}\,\lambda(A)<0$ 时，存在常数 $M>0,\alpha>0$，使

$$\|e^{At}\|\leqslant Me^{-\alpha t} \qquad (t\geqslant 0).$$

由此不等式及 1)～3)，即知 (1) 的零解为渐近稳定的充要条件是 $\mathrm{Re}\,\lambda(A)<0$。

对于变系数线性方程组(2)，判别零解稳定性的问题要复杂得多。例如，即使函数矩阵 $A(t)$ 的一切特征值函数 $\lambda(t)$ 满足

$$\mathrm{Re}\,\lambda(t)<-\alpha<0,$$

也不能保证方程组(2)的零解是渐近稳定的.我们来考察下面的反例:

$$2t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0.\quad (t\geqslant t_0>0). \tag{5}$$

这是一个欧拉方程,容易求出它的通解为

$$x(t)=t^{\frac{1}{4}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{4}\ln t+C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{4}\ln t\right),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

因此,方程(5)的零解是不稳定的.

但是,方程(5)相对应的特征方程为

$$2t^2\lambda^2+t\lambda+1=0,$$

它的两个特征值为

$$\lambda_{1,2}(t)=\frac{-1\pm\sqrt{7}\,\mathrm{i}}{4t},$$

当 $t\geqslant t_0>0$ 时,$\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}(t)<0$.

上述例题表明,定理 1 对变系数线性方程组(2)不适用.变系数方程组(2)的应用范围极其广泛,但是对于这类方程,目前还没有像常系数线性方程那样简单而实用的稳定性判别法.对于方程组(2),目前已有些判别法,它们不只是由特征根实部的情况来判别,下面介绍这方面的一些结果.

定理 2 对于线性微分方程组(2),设 $A(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上连续,则

1) 方程组(2)的零解是稳定的充要条件是:它的一切解 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上是有界的:

$$\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant M(t_0)\|\boldsymbol{x}_0\|; \tag{6}$$

2) 方程组(2)的零解是渐近稳定的充要条件为:它的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 适合

$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}. \tag{7}$$

证 1) 的充分性是显然的.现在假定(2)的零解是稳定的,则对于 $\varepsilon=1$ 及任意的 $t_0\geqslant0$,存在 $\delta=\delta(t_0,1)>0$,使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时,以 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 为初值的解 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上存在,且适合

$$\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<1 \qquad (t\geqslant t_0).$$

但是

$$\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0,$$

其中 $\Phi(t)$是(2)的基本解矩阵。从而,对于任意的 $\boldsymbol{x}_0\in R^n$,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)&=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0\\&=\Phi(t)\ \Phi^{-1}(t_0)\frac{\boldsymbol{x}_0\delta}{2\|\boldsymbol{x}_0\|}\cdot\frac{2\|\boldsymbol{x}_0\|}{\delta}\\&=\boldsymbol{x}\left(t;t_0,\frac{\boldsymbol{x}_0\delta}{2\|\boldsymbol{x}_0\|}\right)\cdot\frac{2\|\boldsymbol{x}_0\|}{\delta}.\end{aligned}$$

因此,得

$$\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|\leqslant\left\|\boldsymbol{x}\left(t;t_0,\frac{\boldsymbol{x}_0\delta}{2\|\boldsymbol{x}_0\|}\right)\right\|\cdot\frac{2\|\boldsymbol{x}_0\|}{\delta}<\frac{2\|\boldsymbol{x}_0\|}{\delta}.$$

置

$$M(t_0)=\frac{2}{\delta(t_0,1)},$$

就证得不等式(6)。

2) 的充分性也是显然的。现假设(2)的零解是渐近稳定的，则存在 $\eta>0$,当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\eta$ 时,解 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$满足

$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}.$$

对于任意的 $\boldsymbol{x}_0\in R^n$,成立

$$\boldsymbol{x}(t;t_0,\ \boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}\left(t;t_0,\frac{\boldsymbol{x}_0\eta}{2\|\boldsymbol{x}_0\|}\right)\cdot\frac{2\|\boldsymbol{x}_0\|}{\eta}\to\boldsymbol{0} \qquad (t\to+\infty).$$

例 1 设函数 $a(t)$在$[0,+\infty)$上连续,微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a(t)x=0 \tag{8}$$

的零解是稳定的，且$\int_{t_0}^{+\infty}|b(t)|\mathrm{d}t<+\infty$。试证微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+[a(t)+b(t)]x=0 \tag{9}$$

的零解是稳定的。

证 设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是方程(8)的一个基本解组。根据定理 2，方程(9)的零解稳定等价于它的一切解是有界的.

微分方程(9)可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a(t)x=-b(t)x,$$

它的通解适合

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\int_{t_0}^{t}K(t,s)[-b(s)x(s)]\mathrm{d}s,$$

其中记

$$K(t,s)=\begin{vmatrix}x_1(s) & x_2(s)\\ x_1(t) & x_2(t)\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}x_1(s) & x_2(s)\\ \dot{x}_1(s) & \dot{x}_2(s)\end{vmatrix}.$$

由于方程(8)的一切解有界，所以存在常数 $M>0$ 和 $N_1>0$，使得下两式成立

$$|C_1x_1(t)+C_2x_2(t)|\leqslant M$$

$$\begin{vmatrix}x_1(s) & x_2(s)\\ x_1(t) & x_2(t)\end{vmatrix}\leqslant N_1.$$

根据刘维尔公式，得到

$$\begin{vmatrix}x_1(s) & x_2(s)\\ \dot{x}_1(s) & \dot{x}_2(s)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1(t_0) & x_2(t_0)\\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0)\end{vmatrix}e^{\int_{t_0}^{t}0\mathrm{d}s}$$

$$=\begin{vmatrix}x_1(t_0) & x_2(t_0)\\ \dot{x}_1(t_0) & \dot{x}_2(t_0)\end{vmatrix}\overset{\Delta}{=}N_2.$$

从而

$$|K(t,s)|\leqslant N,\quad 其中\ N=N_1/N_2$$

因此，

$$|x(t)|\leqslant M+\int_{t_0}^{t}N|b(s)|\cdot|x(s)|\mathrm{d}s$$

根据格朗瓦尔不等式，得到

$$|x(t)|\leqslant Me^{N\int_{t_0}^{t}|b(s)|\mathrm{d}s}\leqslant Me^{N\int_{t_0}^{+\infty}|b(s)|\mathrm{d}s}\leqslant M_1,$$

即方程(9)的一切解在$[t_0,\infty)$上是有界的，根据定理 2，它的零解是稳定的。证毕。

容易将例 1 的结果推广到一般的方程组情形，我们有

定理 3 设 $B(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，且 $\int_{t_0}^{\infty}\|B(t)\|dt<+\infty$. 如果微分方程组(1)的零解是稳定的，则方程组

$$\frac{dx}{dt}=[A+B(t)]x \qquad (*)$$

的零解也是稳定的。

证明留给读者作为练习。

下面给出方程组(2) 的零解是渐近稳定及不稳定的一些判别法。

定理 4 如果存在常数 $\alpha>0$，使得对于一切 $t\geqslant t_0$. 矩阵 $A(t)+A^T(t)$ 的最大特征值 $\lambda_{max}(t)$ 适合

$$\lambda_{max}(t)\leqslant -\alpha<0,$$

则方程组(2)的零解是渐近稳定的。

证 根据定理 2，只要证明方程组(2)的任一解 $x(t)$ 适合

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0.$$

由于 $A(t)+A^T(t)$ 对于每一个 t 值都是埃尔米特矩阵，所以它的一切特征值都是实数，且

$$\lambda_{max}(t)=\max_{x}\frac{x^T[A(t)+A^T(t)]x}{\|x\|^2}.$$

设 $x(t)$ 是方程组(2)的任一解，则

$$\frac{d\|x(t)\|^2}{dt}=\frac{d}{dt}x^T(t)x(t)=x^T[A(t)+A^T(t)]x$$

$$\leqslant\lambda_{max}(t)\cdot\|x(t)\|^2,$$

从 t_0 到 t 积分，得到

$$\|x(t)\|^2\leqslant\|x(t_0)\|^2e^{\int_{t_0}^{t}\lambda_{max}(s)ds}\leqslant\|x(t_0)\|^2e^{-\alpha(t-t_0)}\to0\,(t\to+\infty).$$

定理 5 设 $A(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，且适合

(i) 对于一切 $t_1,t_2\geqslant0$，有

$$\|A(t_1)-A(t_2)\|\leqslant\delta,$$

其中 δ 为某个常数；

(ii) 矩阵 $A(t)$ 的一切特征值 $\lambda(t)$ 满足

$$\operatorname{Re}\lambda(t)<-\alpha \quad (t\geqslant t_0,\alpha>0);$$

(iii) $M\delta\leqslant\alpha/2$,

其中 M 由不等式

$$\|e^{A(t_0)t}\|\leqslant Me^{-\alpha t}$$

确定，则方程组(2)的零解是渐近稳定的。

证 将方程组(2)改写为

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A(t_0)\boldsymbol{x}+[A(t)-A(t_0)]\boldsymbol{x},$$

根据常数变易公式，方程组(2)的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$ 可以表示成

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{A(t_0)(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t_0)(t-s)}[A(s)-A(t_0)]\boldsymbol{x}(s)ds.$$

从而，当 $t\geqslant t_0$ 时，有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant Me^{-\alpha(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}M\delta e^{-\alpha(t-s)}\|\boldsymbol{x}(s)\|ds,$$

即

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|e^{\alpha t}\leqslant Me^{\alpha t_0}\|\boldsymbol{x}(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}M\delta e^{\alpha s}\|\boldsymbol{x}(s)\|ds.$$

根据格朗瓦尔不等式，得到

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|e^{\alpha t}\leqslant Me^{\alpha t_0}\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{M\delta(t-t_0)}, \quad (t\geqslant t_0),$$

即

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{(M\delta-\alpha)(t-t_0)}$$

$$\leqslant M\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}\to 0 \quad (\text{当 } t\to+\infty \text{ 时}).$$

定理 6 如果下列条件之一成立：

(1) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\lambda_{\min}(s)ds>0$,

其中 $\lambda_{\min}(t)$ 是 $A(t)+A^{T}(t)$ 的最小特征值；

(2) $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(s)ds=+\infty$,

则方程组(2)的零解是不稳定的。

证 (1) 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是方程组(2)的任一解，则类似于定理 4 证明中

的估计，成立

$$\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{x}(t)\|^2}{\mathrm{d}t}\geqslant\lambda_{\min}(t)\|\boldsymbol{x}(t)\|^2,$$

从 t_0 到 t 积分，得到

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|^2\geqslant\|\boldsymbol{x}(t_0)\|^2\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\lambda_{\min}(s)\mathrm{d}s}.$$

因此，有

$$2\ln\|\boldsymbol{x}(t)\|\geqslant 2\ln\|\boldsymbol{x}(t_0)\|+\int_{t_0}^{t}\lambda_{\min}(s)\mathrm{d}s,$$

即得

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{2}{t}\ln\|\boldsymbol{x}(t)\|\geqslant\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\lambda_{\min}(s)\mathrm{d}s>0.$$

从而 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上是无界的。根据定理 2，方程组(2)的零解是不稳定的。

(2) 设 $\Phi(t)$ 是方程组(2)的基本解阵。由刘维尔公式

$$|\det\Phi(t)|=|\det\Phi(t_0)|\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s},$$

根据(2)的条件知，$|\det\Phi(t)|$ 在 $[t_0,\infty)$ 上是无界的，从而 $\Phi(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上是无界的，再利用定理 2 即得证明。

习　　题

1．证明定理 3.

(**提示**：利用定理 2 和格朗瓦尔不等式).

2．在下列各题中，确定实参数 a 和 b 的范围，使零解是渐近稳定的：

(1) $\begin{cases}\dot{x}=ax+y,\\ \dot{y}=x+ay;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=ax+by;\end{cases}$　(3) $\begin{cases}\dot{x}=x+ay,\\ \dot{y}=bx-2y;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\dot{x}=ax-2y,\\ \dot{y}=x+y;\end{cases}$　(5) $\begin{cases}\dot{x}=-4ax-4ay,\\ \dot{y}=2ax-6ay.\end{cases}$

3．试判别下列微分方程组的一切解是稳定的，渐近稳定的，还是不稳定的，

(1) $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ -3 & -2 & -1\end{pmatrix}x$； (2) $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}x$；

(3) $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}x$； (4) $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}x$。

4. 试判别下列微分方程组的解的稳定性。

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(t^2-\sin t)x+y\cos^3 t,\\ \dfrac{dy}{dt}=e^t x+y\sin t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y-2x+y\sin t,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x\sin t-2y.\end{cases}$

5. 设 $f(t,x)$ 在区域 $C_H=\{(t,x)\mid t\geqslant t_0,\|x\|\leqslant H\}$ 上连续，且当 $(t,x)\in C_H$ 时成立

$$\|f(t,x)\|\leqslant g(t)\cdot\|x\|,$$

其中 $g(t)$ 是在 $[t_0,+\infty)$ 上定义的非负连续函数，$\int_{t_0}^{+\infty}g(t)dt<+\infty$。 如果 $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$ 的零解是稳定的。试证明：微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t,x)$$

的零解是稳定的。

（提示：利用解的常数变易公式和格朗瓦尔不等式。）

§3 非线性系统的稳定性

第一节我们给出了微分方程的解在李雅普诺夫意义下稳定的定义。对于一般的非线性微分方程，往往无法求出解的解析表达式，因此直接从解的表达式来判别解的稳定性是非常困难的。下面，我们介绍一种在研究稳定性理论及应用中行之有效的方法——李雅普诺夫直接方法，它用不到求出微分方程组的解，而是通过作出适当的李雅普诺夫函数（V 函数），利用微分方程组本身直接判别解的稳定性。现在，我们以自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

的平衡位置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ 的稳定性问题为例，说明李雅普诺夫直接方法的基本思想，以及李雅普诺夫关于稳定性的几个基本定理。其方法容易推广到一般的非自治系统。下面，我们总假设函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 R^n 中包含原点的区域 D 中连续，且具有连续的一阶导数，$\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$。

一、李雅普诺夫函数的定义及判别法

设区域 $C_H=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in R^n,\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H,H>0\}$，$R^+=[0,+\infty)$。

定义 1 设函数 $V:C_H\to R^+$ 是连续的，若 $V(\boldsymbol{x})$ 满足

(1) $V(\mathbf{0})=0$；

(2) $V(\boldsymbol{x})>0(<0),\forall\boldsymbol{x}\in C_H,\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，

则称 $V(\boldsymbol{x})$ 是 C_H 上的定正(定负) 函数。定正和定负的函数统称为定号函数。

定义 2 若函数 $V:C_H\to R^+$ 是连续的，且满足

(1) $V(\boldsymbol{o})=0$；

(2) $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0(\leqslant 0),\forall\boldsymbol{x}\in C_H$，

则称 $V(\boldsymbol{x})$ 是常正(常负)函数。常正和常负的函数统称为常号函数。

定义 3 若函数 $V:C_H\to R$ 是连续的，且满足

(1) $V(\mathbf{0})=\mathbf{0}$；

(2) 在原点 $\mathbf{0}$ 的任一邻域中，$V(\boldsymbol{x})$ 既可以取到正值也可取到负值，

则称 $V(\boldsymbol{x})$ 是变号函数。

定义 4 设函数 $V:C_H\to R$ 是连续可微的，则 $V(\boldsymbol{x})$ 按方程组(1)对时间 t 的全导数定义为

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}\triangleq\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_k}f_k(\boldsymbol{x})=(\mathrm{grad}V,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})), \tag{2}$$

其中 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的内积。

下面，给出函数 $V(\boldsymbol{x})$ 是定正的几个判别法。

判别法 1　二次型 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Ax=(Ax,x)$ 定正的充要条件是：A 的所有主子式是正的，即

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\cdots a_{kk} \end{bmatrix}>0 \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

在介绍第二个判别法之前，先引进一个K类函数的概念。

定义 5　若函数 $a:[0,H]\to R^{+}$ 是连续的，$a(0)=0$ 且在区间$[0,H]$上是严格单调增加的，则称函数 $a(r)$ 是 K 类函数。

判别法 2　满足 $V(0)=0$ 的函数 $V(x)$ 是定正函数的充要条件为：存在 K 类函数 $a(r)$，使得对于一切 $x\in C_H$，成立

$$V(x)\geqslant a(\|x\|). \tag{4}$$

证　充分性显然。下证必要性。

设 $V(x)$ 是定正函数，作函数 $a^*(r)$ 如下：

$$a^*(r)=\inf_{r\leqslant\|x\|\leqslant H} V(x).$$

显然函数 $a^*(r)$ 在$[0,H]$上连续，$a^*(0)=0$ 且当 $r_1<r_2$ 时，$a^*(r_1)\leqslant a^*(r_2)$，$V(x)\geqslant a^*(\|x\|)$ $(\forall x\in C_H)$。

下面我们来构造函数 $a(r)$，使之满足严格单调条件。置 $K=a^*(H)$，且

$$r_n=\sup\left\{\|x\|\;\Big|\; a^*(\|x\|)=\frac{K}{n}\right\},$$

则 r_n 单调下降，且当 $n\to 0$ 时 $r_n\to 0$（见图 9.7）。

置

$$a(r)\triangleq\begin{cases} \dfrac{k}{n+1}+\dfrac{\dfrac{k}{n}-\dfrac{k}{n+1}}{r_n-r_{n+1}}(r-r_{n+1}), & \text{当 } r\in[r_{n+1},r_n], \\ & (n=1,2,\cdots) \\ 0, & r=0, \end{cases}$$

则 $a(r)$ 是所要求的 K 类函数，当 $x\in C_H$ 时，成立

$$V(x)\geqslant a(\|x\|).$$

例 1　问：函数 $V(x)=x_1^2+x_2^2$ 是否一定是定正函数？

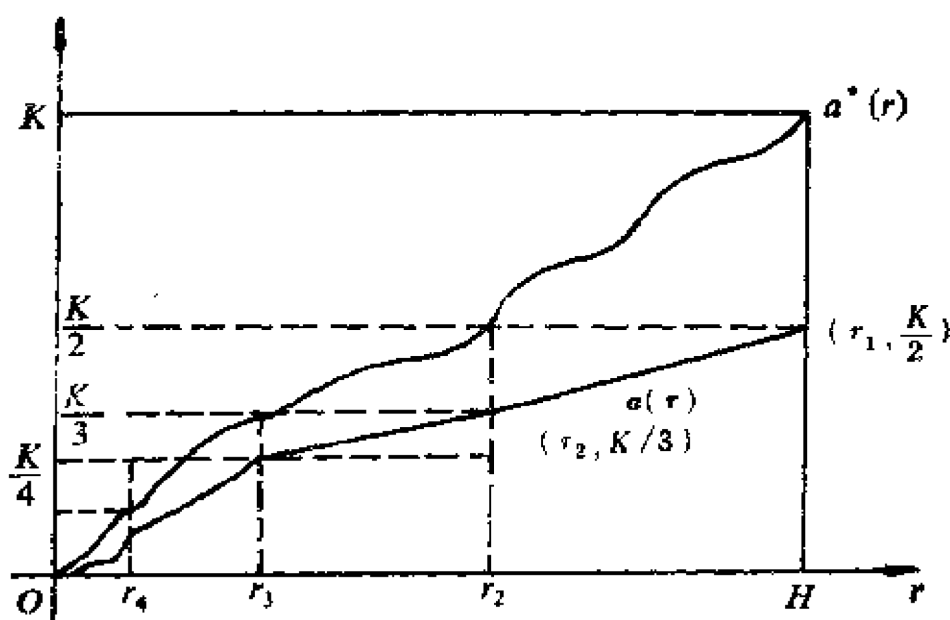


图 9.7

回答是：不一定。事实上，当 $n=2$ 时，$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ 是定正函数，但对于 $n=3$，$V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ 就只是常正函数而不是定正的，因为存在$(0,0,a)\neq 0$(当 $a\neq 0$ 时)使 $V(0,0,a)=0$。

此外要注意的是，关于定正函数 $V(\boldsymbol{x})$，只要求在区域 C_H 上定正，并不要求在全空间 R^n 上除原点 O 外处处为正。

例 2 $n=2, V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2-(x_1^2+x_2^2)^3$。

函数 $V(\boldsymbol{x})$在$\|\boldsymbol{x}\|<1$内是定正的，但并非在 R^2 中处处为正。

判别法 3 设

$$V(\boldsymbol{x})=u_k(\boldsymbol{x})+w(\boldsymbol{x}),$$

其中 $u_k(\boldsymbol{x})$是 k 次齐次函数，即 $u_k(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda^k u_k(\boldsymbol{x})$。又

$$w(\boldsymbol{x})=o(\|\boldsymbol{x}\|^k) \quad (\text{当 } \|\boldsymbol{x}\|\to 0 \text{ 时}).$$

若 $u_k(\boldsymbol{x})$是定正函数，则 $V(\boldsymbol{x})$也是定正的。

证 设 $u_k(\boldsymbol{x})$是定正函数，置

$$m=\min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} u_k(\boldsymbol{x})>0,$$

则

$$u_k(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|^k u_k\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\geqslant m\|\boldsymbol{x}\|^k.$$

根据假设

$$w(\boldsymbol{x})=o(\|\boldsymbol{x}\|^k)\quad(当\|\boldsymbol{x}\|\to 0),$$

对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $0<\|\boldsymbol{x}\|<\delta$ 时，有

$$|w(\boldsymbol{x})|<\varepsilon\|\boldsymbol{x}\|^k,$$

特别地对于 $\varepsilon=m/2>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<\|\boldsymbol{x}\|<\delta$ 时，有

$$V(\boldsymbol{x})\geqslant u_k(\boldsymbol{x})-|w(\boldsymbol{x})|\geqslant m\|\boldsymbol{x}\|^k-\frac{m}{2}\|\boldsymbol{x}\|^k$$

$$=\frac{m}{2}\|\boldsymbol{x}\|^k.$$

又 $V(\mathbf{0})=0$。因此，$V(\boldsymbol{x})$ 是定正的。

现在我们来说明定正函数的几何意义。

引理 设函数 $V:C_H\to R^+$ 是定正的，则当 $C>0$ 充分小时，$V(\boldsymbol{x})=C$ 中必有一个包围原点的闭曲面分支，并且当 $C\to 0$ 时，这族闭曲面收缩到原点。

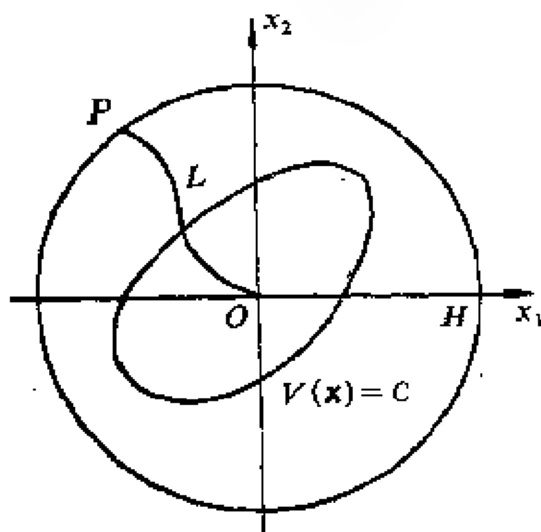


图 9.8

证 置

$$m=\min_{\|\boldsymbol{x}\|=H}V(\boldsymbol{x})>0,$$

下证：若 $0<C<m$，则 $V(\boldsymbol{x})=C$ 中必有包围原点的闭曲面的分支。

事实上，如图 9.8，选取点 $P\in\{\|\boldsymbol{x}\|=H\}$，设 L 是连结原点 O 与 P 点的任意连续曲线，则 $V(\mathbf{0})=0<C$，$V(P)\geqslant m>C$，$V(\boldsymbol{x})$ 在曲线 L 上连续，根据连续函数的介值定理，必定存在点 $Q\in L$，使得 $V(Q)=C$，即 L 必定与曲面 $V(\boldsymbol{x})=C$ 的一支相交。

二、李雅普诺夫直接方法的基本定理

在介绍李雅普诺夫直接方法的基本定理之前，先说明一下李雅普诺夫直接方法的基本思想。

研究零解的稳定性，就是讨论相空间中原点附近的轨线是怎样随着时间的变化而变化的？原点附近的轨线是趋向于原点还是远离原点？如何判断这一点？

对于一维情形的相轨线 $x(t)$，只要度量点 $x(t)$ 到原点的距离就可以了解稳定与否；对于 维情形，可以用向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的范数 $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ 作为判断的标准。

利用范数 $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ 来判断相轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 趋于原点的实质是什么？从几何上看，$\|\boldsymbol{x}\|=C(C>0)$ 表示一族同心球面，每一个球面对应一个 C 值，即它的半径。这些球一个套一个，外面球面的 C 值比里面球面所对应的 C 值大，从外到内，数值 C 减少到零。在每一瞬时，$\|\boldsymbol{x}(t)\|$ 的数值反映出相轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 正在穿过哪一个球面。因此，如果 $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ 作为 t 的函数是单调下降的，则反映相轨线的穿向是由外到内，如果 $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ 趋向于零，就反映了相轨线趋于原点。但是，$\boldsymbol{x}(t)$ 一般是未知的，因此用范数 $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ 来反映相轨线的穿向遇到了困难。

李雅普诺夫直接方法的基本思想在于，用一个适当的 V 函数去建立一族闭曲面 $V(\boldsymbol{x})=C$，相当于前面讲的一族同心球面 $\|\boldsymbol{x}\|=C$ 利用它来研究相轨线的穿向动态。由于 V 函数可以选择，$V(\boldsymbol{x})=C$ 可以是比较广泛的包围原点的闭曲面，因此具有灵活性。

现在我们来考察如何用 V 函数研究零解的稳定、渐近稳定及不稳定性。为了证明方程组(1)的零解是稳定的，应当取一个函数 $V(\boldsymbol{x})$，使得 $V(\boldsymbol{x})=C$ 能够表示为包含原点的一族闭曲面，而外面的闭曲面的 C 值比里面的大，不妨设 $V(\mathbf{0})=0$。另一方面，把相轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 代入函数 V 得到 t 的函数 $V(\boldsymbol{x}(t))$，它反映了在 t 时刻相轨线经过哪一个闭曲面，如果 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 是 t 的单调减少函数且趋向于零，也就证明了 $\boldsymbol{x}(t)$ 由外向内穿过闭曲面而趋于平衡位置，即平衡位置是渐近稳定的（见图 9.9）。

如果 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 至少不增加，那末相轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 就不会越出初始的那个闭曲面 $V(\boldsymbol{x})=V(\boldsymbol{x}(t_0))$，因此，初始时刻与平衡位置充分接近的相轨线仍然在平衡位置的附近，即平衡位置是稳定的。

为了研究不稳定现象，仍然可以用同样的方法。最简单的方法就

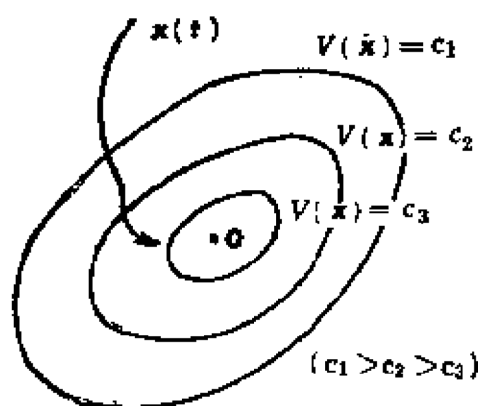


图 9.9

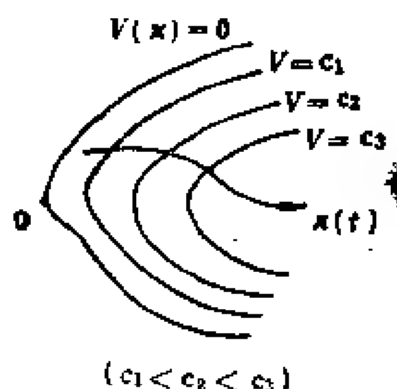


图 9.10

是仍旧用上面的一族曲面，而沿着轨线 $\boldsymbol{x}(t)$，V 函数的数值 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 不断增长。但是，不稳定性只要求在平衡位置的任意邻近存在远离平衡位置的相轨线，而不要求所有的相轨线都远离原点。因此，只要在原点邻近的一部分区域中建立一族曲面（图 9.10)。如果在原点任意近处存在相轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 停留在这个区域中，$V(\boldsymbol{x}(t))$ 不断增加，则平衡位置是不稳定的。

综上所述，可以用一族曲面 $V(\boldsymbol{x})=C$ 在相空间中建立一种广义的尺度，用它去度量相轨线与原点的位置关系，去研究相轨线的走向。

上述思想的分析表示，就是自治系统(1)的下述几个李雅普诺夫基本定理。

定理 1 如果对于微分方程组(1)，存在一个定正的函数 $V(\boldsymbol{x})$，使得它按方程组(1)对时间 t 的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 是常负的，则 (1) 的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是稳定的。

证 设 $V(\boldsymbol{x})$ 是定正函数，根据判别法 2°，存在一个 K 类函数 $a(r)$，使得对一切 $\boldsymbol{x}\in C_H$，有

$$V(\boldsymbol{x})\geqslant a(\|\boldsymbol{x}\|).$$

函数 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 处连续，因此，对于任意给定的 ε，$0<\varepsilon<H$ $(a(\varepsilon)>0)$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，成立

$$V(\boldsymbol{x}_0)<a(\varepsilon).$$

当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\delta$ 时，方程组(1)的以 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 为初值的解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0))\leqslant 0,$$

从而

$$a(\|\boldsymbol{x}(t)\|)\leqslant V(\boldsymbol{x}(t))\leqslant V(\boldsymbol{x}(t_0))=V(\boldsymbol{x}_0)<a(\varepsilon),$$

由于 $a(r)$ 是 K 类函数，有

$$\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon<H \quad (t\geqslant t_0),$$

即零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的。

定理 2 如果对于微分方程组(1)，存在一个定正的函数 $V(\boldsymbol{x})$，使得它按方程组(1)对时间 t 的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 是定负的，则方程组(1)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的。

证 根据定理 1，方程组(1)的零解是稳定的。需要证明的是：对于某个适当的 $\eta>0$，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T>0$，使得当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\eta$ 时，对一切 $t\geqslant t_0+T$，有

$$\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon.$$

设 $V(\boldsymbol{x})$ 和 $-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 是定正的函数。根据判别法 2，存在两个 K 类函数 $a(r),b(r)$，使得

$$V(\boldsymbol{x})\geqslant a(\|\boldsymbol{x}\|),\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x})\leqslant -b(\|\boldsymbol{x}\|) \qquad (\forall \boldsymbol{x}\in C_H).$$

对于任意 $0<\varepsilon<H$，存于 $\delta>0$，当 $\|\boldsymbol{x}\|<\delta$ 时，有

$$V(\boldsymbol{x})<a(\varepsilon)<a(H).$$

置

$$T=T(\varepsilon)=a(H)/b(\delta).$$

现在证明对于 $t_0\geqslant 0$，当 $\|\boldsymbol{x}_0\|<\eta$ 时，解 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 在 $t\geqslant t_0+T$ 时适合

$$\|\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon.$$

先证，对于 $\|x_0\|<\eta$，存在 $t^*\in[t_0,t_0+T]$，使得 $\|x(t^*;t_0,x_0)\|<\delta$。事实上，假定对于一切 $t\in[t_0,t_0+T]$，有 $\|x(t;t_0,x_0)\|\geqslant\delta$，则

$$0<a(\delta)\leqslant a(\|x(t;t_0,x_0)\|)\leqslant V(x(t;t_0,x_0))$$

$$=V(x_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}V(x(t;t_0,x_0))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant V(x_0)-\int_{t_0}^{t}b(\|x(t;t_0,x_0)\|)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant V(x_0)-\int_{t_0}^{t}b(\delta)\mathrm{d}t.$$

当 $t=t_0+T$ 时，得到

$$0<V(x_0)-T(\varepsilon)b(\delta)=V(x_0)-a(H)<0,$$

这是不可能的。因此，当 $t\geqslant t^*$ 时

$$a(\|x(t;t_0,x_0)\|)\leqslant V(x(t;t_0,x_0))\leqslant V(x(t^*;t_0,x_0))<a(\varepsilon).$$

根据 $a(r)$ 是 K 类函数，得到

$$\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon<H \qquad (t\geqslant t^*),$$

即

$$\|x(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon, \qquad (t\geqslant t_0+T),$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty}x(t;t_0,x_0)=\mathbf{0}.$$

在前面两个定理中，V 函数通过方程组(1)对于 t 的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 是一个重要的概念。我们知道，$V(x)=C$ 是空间的曲面，和方程组(1)没有关系，$V(x)$ 本来只是 x 的多元函数，不能对 t 求全导数，只有代入相轨线 $x(t)$ 以后，$V(x(t))$ 反映出沿着相轨线 $x(t)$ 的 V 的数值，才能研究相轨线上 V 的数值的变化率 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$，因此，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 把静止的曲面和运动的相轨线巧妙地联系起来了。这是李雅普诺夫直接方法的实质所在。

再来考察 $\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t}$ 定负的几何意义。因为

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t}=(\mathrm{grad}\,V, f(x(t))),$$

对于曲面 $V(x)=C$，$\mathrm{grad}\,V$ 表示它的外法向，$f(x(t))=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$，表

示相轨线在时刻 t 时所在点处的切向量，当 $\frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt}<0$ 时，$\mathrm{grad}V$ 与 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ 的夹角是钝角，因此相轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 从包围原点的闭曲面 $V(\boldsymbol{x})=C$ 的外部穿进内部，最后趋于原点（图 9.11）。

下面用 V 函数讨论零解的不稳定性。设 $\{V>0\}=\{\boldsymbol{x}\,|\,V(\boldsymbol{x})>0,\ \boldsymbol{x}\in C_H\}$，$O_\delta=\{\boldsymbol{x}\,|\,\|\boldsymbol{x}\|<\delta\}$。

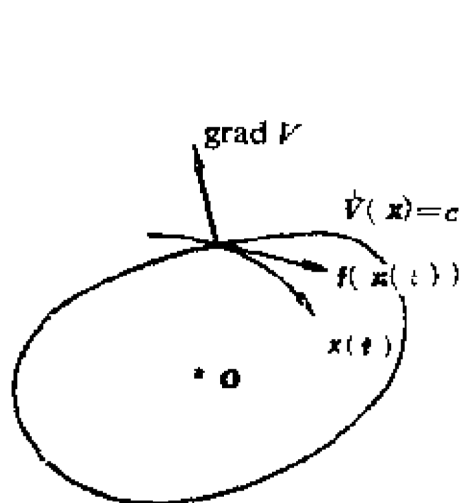


图 9.11

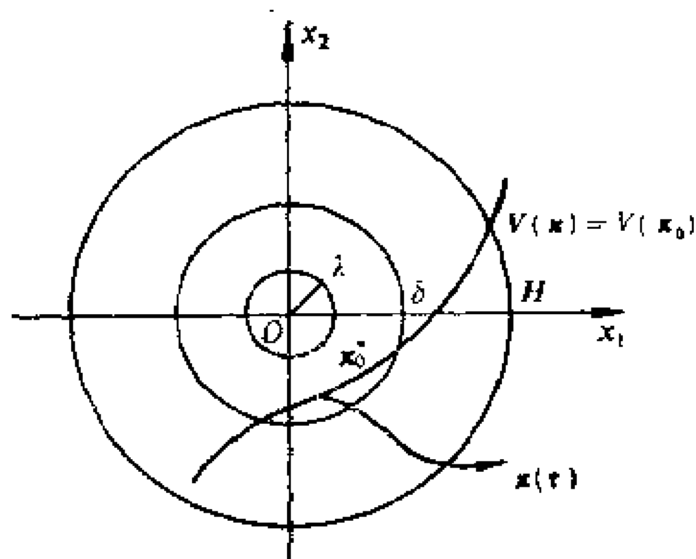


图 9.12

定理 3 若对于微分方程组(1)，存在函数 $V(\boldsymbol{x})$ 满足

(1) 对一切 $\delta>0$，$\{V>0\}\cap O_\delta$ 非空，$V(\mathbf{0})=0$；

(2) V 按方程组(1) 对 t 的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 定正。

则方程组(1)的零解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是不稳定的。

证 对于任意的 $\delta>0$，选取

$$\boldsymbol{x}_0^*\in\{V>0\}\cap O_\delta,$$

设 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0^*)$ 表示 $t=t_0$ 时从 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0^*$ 出发的相轨线（图9.12）。下证：总存在某个时刻 $t^*\geqslant t_0$，使得

$$\|\boldsymbol{x}(t^*)\|>H.$$

用反证法。假定对于一切 $t\geqslant t_0$，有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant H,$$

根据 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{o}$ 处的连续性，对于 $V(\boldsymbol{x}_0^*)>0$，存在 $\lambda>0$，使得当 $|\boldsymbol{x}|<\lambda$ 时，有

$$V(\boldsymbol{x})<V(\boldsymbol{x}_0^*).$$

因此，相轨线 $\boldsymbol{x}(t)$ 位于环域

$$\lambda\leqslant|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant H \qquad (t\geqslant t_0)$$

之中。置

$$m=\min_{\lambda\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant H}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}>0.$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t}\geqslant m$，得到

$$V(\boldsymbol{x}(t))\geqslant V(\boldsymbol{x}_0^*)+mt\to+\infty \ (\text{当 } t\to+\infty \text{ 时}),$$

与 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\lambda\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant H$ 中有界矛盾。

下面再介绍一个关于用 V 函数判别渐近稳定性的结果，其中要用到正半轨的概念。

定义 6 轨线 $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 中 $t\geqslant t_0$ 的部分，称为正半轨。

定理 4 （克拉索夫斯基-巴尔巴辛 Красовский Бароашин）对于自治系统 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，若存在定正函数 $V(\boldsymbol{x})$，使 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 常负，且集合 $\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x})=0,\boldsymbol{x}\in C_H\right\}$ 不包含方程组的非零正半轨，则零解是渐近稳定的。

证 由于 $V(\boldsymbol{x})$ 定正，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x})$ 为常负，根据定理 1 知零解是稳定的。

在 C_H 内作闭曲面 $V(\boldsymbol{x})=c>0$，见图 9.13.（只要取（$0<c<m$，其中 $m=\inf\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=H}V(\boldsymbol{x})$。

因为 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 处连续，所以对于 $c>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|\boldsymbol{x}|<\delta$ 时，有 $V(\boldsymbol{x})<c$。

现在考察 $|\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 的轨线 $\boldsymbol{x}(t;0,\boldsymbol{x}_0)\triangleq\boldsymbol{x}(t)$，首先证明轨线 $\boldsymbol{x}(t)$

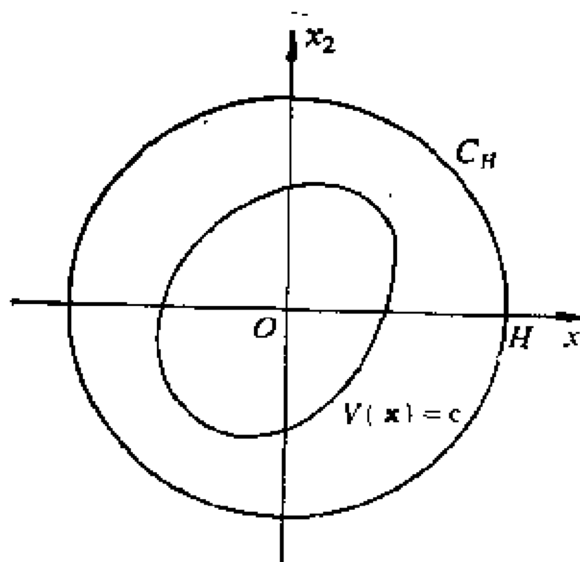


图 9.13

在$[0,+\infty)$上存在。

事实上，假定$\boldsymbol{x}(t)$在$[0,\beta)$上存在，$\beta<+\infty$，由饱和解的端点性质知，存在$\delta_1>0$，当$t\in(\beta-\delta_1,\beta)$时，轨线$\boldsymbol{x}(t)\notin$有界闭域$\bar{D}_1\cap D$，但是$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$，所以

$$V(\boldsymbol{x}(t))\leqslant V(\boldsymbol{x}_0)<c,\quad (t\geqslant 0),$$

即

$$\boldsymbol{x}(t)\subset \bar{D}_1=\{\boldsymbol{x}\,|\,V(\boldsymbol{x})\leqslant c\}\quad (t\geqslant 0).$$

这就得矛盾。

下面证明，$\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$。

假定$\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)\neq\boldsymbol{0}$，由于$\boldsymbol{x}(t)$有界，所以存在数列$\{t_n\}$，$t_n\to+\infty$，使$\boldsymbol{x}(t_n)\to\boldsymbol{x}^*\neq\boldsymbol{0}$。

设轨线$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{x}(t;0,\boldsymbol{x}^*)(t\in[0,+\infty))$，根据自治系统解的性质

$$\boldsymbol{x}(t_n+\tau;0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}(\tau;0,\boldsymbol{x}(t_n)),$$

并利用解对初值的连续依赖性，得到

$$\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{x}(t_n+\tau)=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(\tau;0,\boldsymbol{x}(t_n))=\boldsymbol{x}(\tau;0,\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{y}(\tau).$$

因为 $V(x(t))\geqslant 0$，$\dfrac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$，所以

$$\lim_{t\to+\infty} V(x(t))=V_\infty$$

存在，即

$$\lim_{n\to\infty} V(x(t_n+\tau))=V_\infty。$$

利用 $V(x)$ 连续，$x(t_n+\tau)\to y(\tau)(n\to\infty)$，我们有

$$V(y(\tau))=V_\infty,\qquad \tau\in[0,+\infty)。$$

因此，有

$$\frac{\mathrm{d}V(y(t))}{\mathrm{d}t}=0,\qquad t\in[0,\infty)。$$

即非零正半轨 $y(t)\subset\left\{\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0\right\}$，得到矛盾。

注 克拉索夫斯基-巴尔巴辛定理对于非自治系统一般不成立。例如，考虑数量方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-p(t)x,$$

其中 $p(t)>0, t\in[0,+\infty)$，且 $\int_0^{+\infty}p(t)\mathrm{d}t<+\infty$。置

$$V(x)=x^2,$$

它是定正函数，且 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-2p(t)x^2\leqslant 0$。此外

$$\left\{x\,\middle|\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0\right\}=\{x=0\}\text{不包含非零的正半轨。}$$

但是，解 $x(t;0,x_0)=x_0\mathrm{e}^{-\int_0^t p(s)\mathrm{d}s}\nrightarrow 0$ （当 $t\to+\infty, x_0\neq 0$ 时）。

三、一次近似理论

对于非线性微分方程组(1)，我们可以用李雅普诺夫直接方法来研究它的零解的稳定性，但是构造李雅普诺夫函数至今还没有一个一般

的方法。对于线性系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}, \tag{5}$$

可以根据矩阵 A 的特征值的分布，来判别其零解稳定性， 这是个代数判别的方法。人们自然地想，如果将非线性方程组(1)"线性化"，即当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 可以在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 附近展开成

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|=o(\|\boldsymbol{x}\|)$$

即 (1) 变成为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

时，能否根据对应的"线性化"的方组程(5) 的零解稳定性的信息，来推断非线性方程组(1)的零解稳定性呢？通常称(5)为(1)的一次近似方程组。在一般情况下，线性系统与非线性系统的解的性质是有本质区别的，我们看一个例子。

例 3 考察微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2.$$

如果初值 $x_0>0$，则上述方程满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解为

$$x(t)=\frac{x_0}{1-x_0(t-t_0)},$$

它的最大存在区间是$\left(-\infty,\ \frac{1}{x_0}+t_0\right)$。由于解并不在整个无穷区间 $t\geqslant t_0$ 上存在，因此，它的零解是不稳定的。但是这个方程的一次近似方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,$$

显然，它的零解是稳定的，此例中，$A=0$ 具有零特征值，这时从一次近似方程的零解的稳定性，不能判别原先非线性方程的零解的稳定性。但在应用中，很多场合下可以应用一次近似来进行判别，下面介绍一次近似的理论。

定理 5 设函数 $\boldsymbol{g}$：$C_H\to R^n$ 是连续的，且满足

$$g(\boldsymbol{x})=o(\|\boldsymbol{x}\|) \quad (\text{当 } \|\boldsymbol{x}\|\to 0 \text{ 时}), \tag{7}$$
如果一次近似方程组(5)的零解是渐近稳定的，那末原方程组(6)的零解也是渐近稳定的。

证 一次近似线性方程组(5)的零解渐近稳定，等价于矩阵 A 是稳定阵，即它的所有特征值都具有负实部：

$$\operatorname{Re}\lambda(A)<0.$$

这时，存在正的常数 M 和 α，使得

$$\|e^{A(t-t_0)}\|\leqslant Me^{-\alpha(t-t_0)} \quad (t\geqslant t_0). \tag{8}$$

根据常数变易公式，方程组(6)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))ds,$$

利用(8)，我们得到当 $t\geqslant t_0$ 时，$\boldsymbol{x}(t)$ 适合

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{-\alpha(t-t_0)}+M\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\|ds.$$

根据条件(7)，对于给定的正数 ε，$0<\varepsilon<\alpha$，存在 $0<\delta<H$，使得当 $\|\boldsymbol{x}\|<\delta$ 时，成立

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|<\varepsilon\|\boldsymbol{x}\|/M.$$

因此，如果 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\|<\delta$，那末只要 $\|\boldsymbol{x}(t)\|<\delta$，则我们有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{-\alpha(t-t_0)}+\varepsilon\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\|\boldsymbol{x}(s)\|ds.$$

将 t 换成 $t+t_0$，得到

$$\|\boldsymbol{x}(t+t_0)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{-\alpha t}+\varepsilon\int_{0}^{t}e^{-\alpha(t-s)}\|\boldsymbol{x}(s+t_0)\|ds,$$

即

$$e^{\alpha t}\|\boldsymbol{x}(t+t_0)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(t_0)\|+\varepsilon\int_{0}^{t}e^{\alpha s}\|\boldsymbol{x}(s+t_0)\|ds.$$

应用格朗瓦尔不等式，得

$$e^{\alpha t}\|\boldsymbol{x}(t+t_0)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{\varepsilon t},$$

或者，只要 $\|\boldsymbol{x}(t)\|<\delta$，就有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}(t_0)\|e^{-(\alpha-\varepsilon)(t-t_0)} \tag{9}$$

选取 $\delta_1<\delta/M$，则当初值 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\|<\delta_1$ 时，解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上存在，

且适合(9)。

下面说明当 $t_0 \leqslant t < +\infty$ 时，方程组(6)的解 $\boldsymbol{x}(t)$ 始终满足不等式

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant M\delta_1 < \delta. \tag{10}$$

事实上，假定不成立，则存在某个时刻 $t_1 > t_0$，使得当 $t_0 \leqslant t < t_1$ 时

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant M\delta_1 < \delta$$

成立，而 $\|\boldsymbol{x}(t_1)\| = \delta$。但由于当 $t_0 \leqslant t < t_1$ 时，不等式(10)成立，因此适合估计式(9)，于是在(9)式中令 $t \to t_1$，得到

$$\delta = \|\boldsymbol{x}(t_1)\| \leqslant M\delta_1 < \delta.$$

这是矛盾。因此，对于一切 $t \geqslant t_0$，$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant M\delta_1 < \delta$。

下面我们考虑 A 的一个特征值具有正实部的情形。

定理6 设 A 是 $n \times n$ 阶非奇异矩阵，至少有一个特征值具有正实部。函数 $\boldsymbol{g}$: $C_H \to R^n$ 是连续的，且满足

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = o(\|\boldsymbol{x}\|) \qquad (\text{当} \|\boldsymbol{x}\| \to 0 \text{时}),$$

则微分方程组(6)的零解是不稳定的。

证 不妨假设 $\operatorname{Re}\lambda(A) \neq 0$。根据线性代数的理论，存在非奇异阵 T，使得

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(A_1, A_2),$$

其中 $\qquad \operatorname{Re}\lambda(A_1) < 0$，$\operatorname{Re}\lambda(A_2) > 0$。

对微分方程组(6)进行线性变换

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y},$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = T^{-1}[AT\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(T\boldsymbol{y})] = \operatorname{diag}(A_1, A_2)\boldsymbol{y} + T^{-1}\boldsymbol{g}(T\boldsymbol{y}).$$

由于 $T^{-1}\boldsymbol{g}(T\boldsymbol{y}) = o(\|\boldsymbol{y}\|)$ (当 $\|\boldsymbol{y}\| \to 0$ 时)，所以不失一般性，可设

$$A \triangleq \operatorname{diag}(A_1, A_2).$$

根据下一段四中引理，存在正定、对称矩阵 B_1 和 B_2，分别满足矩阵方程

$$A_1^{\mathrm{T}}B_1 + B_1A_1 = -I_1$$

$$(-A_2^{\mathrm{T}})B_2 + B_2(-A_2) = -I_2,$$

其中 I_1 和 I_2 都是单位阵，其阶数分别和矩阵 A_1 和 A_2 相同。

作李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{x}) = -u^{\mathrm{T}}B_1u + w^{\mathrm{T}}B_2w,$$

其中 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$，$u$ 和 w 的维数分别和矩阵 B_1, B_2 的阶数相同。显然，对于任意的 $\delta>0$，$O_\delta \cap \{V>0\}$ 是非空的，且

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

因此，$V(\boldsymbol{x})$ 关于方程组(6)对于时间 t 的全导数为

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\right|_{(6)} &= -\dot{u}^{\mathrm{T}}B_1u - u^{\mathrm{T}}B_1\dot{u} + \dot{w}^{\mathrm{T}}B_2w + w^{\mathrm{T}}B_2\dot{w} \\
&= -u^{\mathrm{T}}(A_1^{\mathrm{T}}B_1 + B_1A_1)u + w^{\mathrm{T}}(A_2^{\mathrm{T}}B_2 + B_2A_2)w \\
&\quad - 2\,g_1^{\mathrm{T}}B_1u + 2\,g_2^{\mathrm{T}}B_2w \\
&= u^{\mathrm{T}}u + w^{\mathrm{T}}w + 2\,\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + o(\|\boldsymbol{x}\|^2).
\end{aligned}$$

根据定正函数的判别法 3，$\left.\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\right|_{(6)}$ 是定正的。根据 §2 的定理 3 知，方程组(6)的零解是不稳定的。

根据定理 1，用一次近似理论判别非线性方程组的零解的渐近稳定性问题，归结为判别矩阵 A 是否为稳定阵，即判别是否有 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$ 的问题。A 的特征值是特征方程

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{11}$$

的根。方程(11)是一个 λ 的 n 次代数方程

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{12}$$

我们知道，高次代数方程的求根是个困难的问题，对于一般矩阵 A，虽然可用数值计算方法计算，但较麻烦。由于我们只需要知道是否有 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$，而并不需要知道 $\lambda(A)$ 的确切数值。因此，在应用中，当 A 的阶数 n 不高时，可利用下面介绍的劳斯–霍尔维茨(Routh–Hurwitz)判据。对于代数方程(12)，可根据多项式 $f(\lambda)$ 的系数构成一个霍尔维茨

矩阵

$$
H \triangleq \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & 1\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & & 0 & a_n \end{pmatrix}, \tag{13}
$$

它的各阶主子式为：

$$
\triangle_1 = a_1, \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \triangle_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},
$$

$$
\cdots\cdots, \quad \triangle_n = a_n \triangle_{n-1}, \text{其中当} k > n, a_k = 0 \tag{14}
$$

定理 7 实系数的代数方程(12)的所有根都具有负实部的充要条件是：霍尔维茨矩阵(13)的一切主子式

$$
\triangle_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{15}
$$

条件(15)通常称为劳斯-霍尔维茨条件。

定理 7 的详细证明可参看[1]。

应用劳斯-霍尔维茨判据，得到实系数二次方程

$$
\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0
$$

的根都具有负实部的充要条件是

$$
a_1 > 0, \ a_2 > 0.
$$

实系数的三次代数方程 $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ 的一切根都具有负实部的充要条件是

$$
a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_3 > 0.
$$

实系数的四次代数方程 $\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$ 的一切根都具有负实部的充要条件是

$$
a_1 > 0, \ a_1a_2 - a_3 > 0, \ a_3(a_1a_2 - a_3) - a_1^2a_4 > 0, \ a_4 > 0.
$$

四、李雅普诺夫函数的构造

从第三段我们知道，用李雅普诺夫直接方法解决微分方程的稳定

性问题，关键在于作出适当的李雅普诺夫函数，从而得到保证系统的平衡位置稳定性的条件，当然最好是得到系统稳定性的充要条件。但是，对于一般的非线性常微分方程，目前还没有构造李雅普诺夫函数的一般方法。这里，对于若干特殊情形，介绍一些比较实用的构造李雅普诺夫函数的方法。现在我们从最简单的类型谈起。

(一) 二次型李雅普诺夫函数和李雅普诺夫方程

考察线性常系数微分方程组(5)，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x},$$

先介绍一个引理。

引理 设 A 是 $n\times n$ 阶矩阵，则对于每一个正定、对称阵 C(记为 $C>0$)，矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}B+BA=-C \tag{16}$$

有正定、对称解 B 的充要条件是：

$$\mathrm{Re}\lambda(A)<0. \tag{17}$$

证 必要性。设存在正定阵 $B,B^{\mathrm{T}}=B$，使得

$$A^{\mathrm{T}}B+BA=-C\qquad (C>0).$$

我们选取一个二次型作为 V 函数，即

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x},$$

它是定正函数。$V(\boldsymbol{x})$按方程组(5)对 t 的全导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}BA\boldsymbol{x}$$

$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}B+BA)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{x}$$

是定负的。根据 §2 的定理 2，方程组(5)的零解 $\boldsymbol{x}=0$ 是渐近稳定的，对于线性常系数方程组(5)，这等价于

$$\mathrm{Re}\lambda(A)<0.$$

充分性，设 $\mathrm{Re}(A)<0,C>0$。

置

$$B=\int_0^{+\infty} e^{A^T t} C e^{At} dt.$$

由于 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$,所以存在常数 $K>0,\alpha>0$,使得

$$\|e^{At}\| \leqslant K e^{-\alpha t} \qquad (t\geqslant 0).$$

因此,成立

$$\|e^{A^T t} C e^{At}\| \leqslant M e^{-\beta t} \qquad (t\geqslant 0, M>0, \beta>0).$$

所以,矩阵 B 有定义。$B^T=B$ 是显然的.又

$$\begin{aligned}A^T B+BA &= \int_0^{+\infty} (A^T e^{A^T t} C e^{At} + e^{A^T t} C e^{At} A) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(e^{A^T t} C e^{At}) dt \\ &= (e^{A^T t} C e^{At})\Big|_0^{+\infty} = -C.\end{aligned}$$

对于 $x\neq 0, x\in R^n$,有

$$\begin{aligned}x^T B x &= \int_0^{+\infty} (x^T e^{A^T t}) C (e^{At} x) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{At} x)^T C (e^{At} x) dt > 0,\end{aligned}$$

所以 B 是正定阵。

利用上述引理,可得以下关于渐近稳定的充要条件。

定理 8 线性常系数微分方程组 (5) 的零解是渐近稳定的充要条件为:存在连续可微的 $V(x)$ 在 C_H 上定义,$V(x)$ 定正且 $\frac{dV}{dt}$ 定负。

引理中的矩阵方程(16)通常称为李雅普诺夫方程。上面介绍的通过解一个李雅普诺夫方程(16),构造出二次型的李雅普诺夫函数的方法是非常有用的。

例 4 用李雅普诺夫直接方法研究微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x+y+x^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=-5x+y-xy\end{cases}$$

的零解的稳定性。

解 该微分方程组对应的线性系统的系数矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -5 & 1\end{pmatrix}.$$

首先求解李雅普诺夫方程

$$A^{T}B+BA=-I, \tag{18}$$

其中 I 为单位阵。设对称阵 B 为

$$B=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix},$$

代入方程(18)，得到

$$\begin{pmatrix}-3a-5b & -3b-5c\\ a+b & b+c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3a-5b & a+b\\ -3b-5c & b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{aligned}&-6a-10b=-1,\\ &a-2b-5c=0,\\ &2b+2c=-1.\end{aligned}$$

它的解为

$$a=\frac{7}{2},\quad b=-2,\quad c=\frac{3}{2}.$$

于是，作二次型的李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{x}^{T}B\boldsymbol{x}\\ &=\frac{7}{2}x^{2}-4xy+\frac{3}{2}y^{2},\end{aligned}$$

它是定正函数，且

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=-(x^{2}+y^{2})+(7x-4y)x^{2}+(3y-4x)xy\\ &=-(x^{2}+y^{2})+o(\|\boldsymbol{x}\|),\end{aligned}$$

根据定正函数的判别法 3 知，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是定负的。因此，根据§2的定理2，零解是渐近稳定的。

（二）类比法

类比法是对非线性系统构造李雅普诺夫函数的一种有效的方法。这种方法首先求出相应线性系统的二次型李雅普诺夫函数，然后对非线性系统进行类比，找出类似的李雅普诺夫函数。

从上面的讨论可看出，如果我们选取 V 函数为

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}, \tag{19}$$

要求按方程组(1)对 t 的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{x},$$

则矩阵 B 适合矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}B+BA=C。 \tag{20}$$

例 5 设 $f(0)=0$，研究函数 $f(x)$ 在什么条件下保证

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)+by,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+\mathrm{d}y。\end{cases} \tag{21}$$

的零解是渐近稳定的。

解 首先考察与上述非线性系统相应的线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+\mathrm{d}y。\end{cases} \tag{22}$$

根据劳思-霍尔维茨判据，当 $a+d<0, ad-bc>0$ 时，线性系统的零解是渐近稳定的。

对于线性系统(22)，试作二次型的李雅普诺夫函数

$$V_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x},$$

使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(22)}=2(a+d)(ad-bc)x^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{x}。$$

解矩阵方程 $A^{\mathrm{T}}B+BA=C$，置 $B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(a+d)(ad-bc) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即

$$2(a\beta_1+c\beta_2)=(a+d)(ad-bc),$$
$$b\beta_1+(a+d)\beta_2+c\beta_3=0,$$
$$2(b\beta_2+d\beta_3)=0.$$

解得

$$\beta_1=(ad-bc)+d^2,$$
$$\beta_2=-bd,$$
$$\beta=b^2.$$

于是
$$V_1(x,y)=(ad-bc)x^2+(dx-by)^2. \tag{23}$$

将非线性系统(21)与线性系统(22)类比，相当于用 $f(x)$代替ax。将(23)改写成

$$V_1(x,y)=2d\int_0^x as\,\mathrm{d}s-bcx^2+(dx-by)^2.$$

于是由类比取函数

$$V(x,y)=2d\int_0^x f(s)\mathrm{d}s-bcx^2+(dx-by)^2$$

作为非线性系统(21)的 V 函数，计算 V 关于(21)对 t 的全导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(21)}=2df(x)[f(x)+by]-2bcx[f(x)+by]+2(dx-by)d[f(x)+by]+2(dx-by)(-b)(cx+dy)$$
$$=2\left[\frac{f(x)}{x}+d\right]\cdot\left[\frac{f(x)}{x}d-bc\right]x^2,$$

因此，当函数 $f(x)$满足：

(i) 当 $x\neq0$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}+d<0$；

(ii) 当 $x\neq0$ 时，$d\cdot\dfrac{f(x)}{x}-bc>0$

时，$\frac{dV}{dt}$常负，而由于 $V(x,\ y)=2d\int_0^x \frac{f(s)}{s}\cdot s\mathrm{d}s-bcx^2+(dx-by)^2$

$$>\int_0^x 2bcs\,\mathrm{d}s-bcx^2+(dx-by)^2$$
$$=(dx-by)^2,$$

所以，$V(x,y)$定正.此外，显然集合$\left\{x\mid \frac{dV}{dt}=0\right\}$不包含非零的正半轨，因此，根据克拉索夫斯基-巴尔巴辛定理，非线性系统(21)的零解是渐近稳定的。

例 6 设 $f(0)=g(0)=0$，研究在什么条件下，方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+g(x)=0 \tag{24}$$

的零解是渐近稳定的。

解 置 $\dot{x}=y$，得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x)-f(x)y.\end{cases} \tag{25}$$

首先对于相应的线性系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+\mathrm{d}y.\end{cases} \tag{26}$$

作出二次型的 V 函数

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}.$$

显然，(26)的零解渐近稳定的充要条件是：$c<0$，$d<0$。若要求$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(26)}=\mathrm{d}y^2$，解矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}B+BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&d\end{pmatrix},$$

解得

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{c}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

因此，
$$V=-\frac{1}{2}cx^2+\frac{1}{2}y^2$$
$$=\int_0^x(-cx)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}y^2.$$

然后进行类比，比较(26) 和(25)，相当于用 $-g(x)$代替 cx，用 $-f(x)$代替 d，于是找出非线性系统的 V 函数

$$V(x,y)=\int_0^x g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}y^2.$$

$V(x,y)$关于方程组(25)对 t 的全导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(25)}=-f(x)y^2.$$

因此，若 $x\neq0$ 时，$xg(x)>0$，且 $f(x)>0$，则上述的 $V(x,y)$ 定正，且 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(25)}$ 是常负的，而集合$\left\{x\,\middle|\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0\right\}$不包含非零的正半轨，所以(25)的零解是渐近稳定的。

（三）能量法

如果一个微分方程具有明确的力学意义，那末通常可以写出系统的总的机械能作为李雅普诺夫函数$V(x)$．如果没有阻尼，则根据机械能守恒定律，$V(x)=$常数，于是$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\equiv0$，得到零解是稳定的；如果整个系统有阻尼存在，则在运动过程中，整个能量是耗散的，机械能将转化成热能等，这时的$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$反映出能量的变化率，由此容易得出零解是渐近稳定的充分条件．

例 7 研究无阻尼的单摆运动方程（见图 9.14）

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin x=0$$

的零解的稳定性。

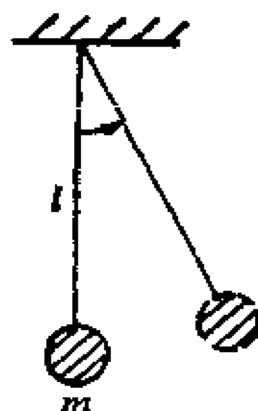


图9.74

解 用能量法构造李雅普诺夫函数.

置 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,得到

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{g}{l}\sin x.\end{cases}$$

系统的总的机械能为

$$E=\frac{1}{2}m(ly)^2+mgl(1-\cos x)=\text{常数}.$$

取 $\quad V(x,y)=\frac{1}{2}m(ly)^2+mgl(1-\cos x)$,它是定正的,则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=(mgl\sin x)\,y+ml^2y\left(-\frac{g}{l}\sin x\right)\equiv 0,$$

所以零解是稳定的。但 $V(x(t),y(t))\equiv V(x_0,y_0)$,所以零解不是渐近稳定的。

例8 设 $f(0)=g(0)=0$. 用能量法作出 V 函数,讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+g(x)=0 \tag{27}$$

的零解的稳定性。

解 方程(27)所描写的是一个单位质量的质点,在非线性恢复力 $g(x)$ 及非线性阻尼力 $f(x)$ 作用下的运动。

置 $y=\dot{x}$,(27)化成等价的微分方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x)-f(x)y.\end{cases} \tag{28}$$

系统的总的机械能为

$$E=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)\mathrm{d}s,$$

其中第一项$\frac{1}{2}y^2$表示动能，$\int_0^x g(s)\mathrm{d}s$ 表示位能。

选取 $V(x, y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)\mathrm{d}s$,则

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(14)}=-f(x)y^2,$$

由此可见,若对函数 $f(x)$和 $g(x)$加条件:

(i) 当 $x\neq 0$ 时,$xg(x)>0$;

(ii) $f(x)>0$, (29)

则零解是渐近稳定的(利用克拉索夫斯基-巴尔巴辛定理)。

用李雅普诺夫函数解决稳定性实际问题时，可能会得出各种不同的充分条件,由于一般不是充要条件,因此总有改进的余地。

以例 8 的方程(27)为例,如果不是作变换 $y=\dot{x}$ 化为(28),而是作林纳(Liénard)变换

$$y=\dot{x}+\int_0^x f(s)\mathrm{d}s,$$

则方程(28)化为等价的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-\displaystyle\int_0^x f(s)\mathrm{d}s,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x).\end{cases}\tag{30}$$

如果我们仍用李雅普诺夫函数

$$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)\mathrm{d}s,$$

则

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(30)}=-g(x)\int_0^x f(s)\mathrm{d}s.$$

于是,若对函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 加条件:

(i) 当 $x\neq 0$ 时,$xg(x)>0$;

(ii) 当 $x\neq 0$ 时,$x\int_0^x f(s)\mathrm{d}s>0$,

则（30）的零解是渐近稳定的．这时所得的条件，即当 $x\neq 0$ 时 $x\int_0^x f(s)\mathrm{d}s>0$，要比 $f(x)>0$ 弱。

五、变量分离型的李雅普诺夫函数

我们用下面的例子，研究用分离变量法作李雅普诺夫函数。

例 9 设 $f(0)=h(0)=0$，讨论在什么条件下方程

$$\ddot{x}+h(\dot{x})+f(x)g(\dot{x})=0 \tag{31}$$

的零解是渐近稳定的。

解 与(31)等价的系统为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(x)g(y)-h(y).\end{cases} \tag{32}$$

我们作分离变量型的李雅普诺夫函数

$$V(x,y)=F(x)+G(y),$$

V 按照方程组(32)对于 t 的全导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(32)}=F'(x)y-G'(y)[f(x)g(y)+h(y)].$$

为了便于判别 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 的常号性，我们要求

$$F'(x)y-G'(y)f(x)g(y)\equiv 0,$$

即

$$\frac{F'(x)}{f(x)}=\frac{G'(y)g(y)}{y},$$

两边应是常数，不妨取为 1，于是得到

$$F(x)=\int_0^x f(s)\mathrm{d}s,\quad G(y)=\int_0^y \frac{y}{g(y)}\mathrm{d}y.$$

于是

$$V(x,y)=\int_0^x f(s)\mathrm{d}s+\int_0^y \frac{u}{g(u)}\mathrm{d}u,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(32)}=-\frac{y}{g(y)}h(y).$$

因此，根据克拉索夫斯基-巴尔巴辛定理，我们得到零解为渐近稳定的充分条件：

(i) 当 $x\neq 0$ 时，$xf(x)>0$；

(ii) 当 $y\neq 0$ 时，$yg(y)>0$；$h(y)>0$，$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{yh(y)}{g(y)}=0$。

习　题

1. 试用构造二次型的李雅普诺夫函数的方法，证明§3三段的定理1。

2. 下列命题是否正确？

"如果 $V(x)$ 是定正函数，则对于任何 $x\neq 0$，$V(x)>0$"。

3. 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x^2$，以 (t_0,x_0) 为初始值的解为

$x(t)=\dfrac{x_0}{1+(t-t_0)x_0}$，由此可知零解是不稳定的。另一方面，如果选取 $V(x)=\mathrm{e}^x$，则 $V(x)>0$，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}^x x^2$ 定负。根据李雅普诺夫稳定性基本定理，零解是渐近稳定的。试分析为什么会得到矛盾的结果。

4. 对于微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+\sin x,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ax+by,$$

设 $a\neq b$，且 $(b+1)^2\neq 4(b-a)$，$b\neq -1$。

(1) 判别奇点 $(0,0)$ 的类型；(2) 当 a,b 为何值时，零解渐近稳定？用李雅普诺夫方法给以证明；(3) 证明，如果零解渐近稳定，则不存在极限环。

5. 用一次近似的理论，判别下列微分方程组的平衡位置的稳定性：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-xy,$

$\quad\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-y^3;$

(2) $\frac{dx}{dt}=\sin(x+y)$,

$\frac{dy}{dt}=e^x-1$;

(3) $\frac{dx}{dt}=y$,

$\frac{dy}{dt}=\sin(x+y)$;

(4) $\frac{dx}{dt}=(x-1)(y-1)$,

$\frac{dy}{dt}=xy-2$.

6. 用劳斯-霍尔维茨判据判别，实参数 a 和 b 为何值时，下列方程的零解是渐近稳定的？

(1) $\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+ax=0$;

(2) $\frac{d^4x}{dt^4}+2\frac{d^3x}{dt^3}+a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+x=0$;

(3) $\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0$;

(4) $\frac{d^3x}{dt^3}+a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+2x=0$.

7. 炮弹在平坦的弹道上的旋转运动方程组为

$$\begin{cases}A\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos\alpha-2A\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\sin\alpha+cn\frac{d\alpha}{dt}=eR\sin\varphi,\\ A\frac{d^2\alpha}{dt^2}+A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin\alpha\cos\alpha-cn\frac{d\varphi}{dt}\cos\alpha=eR\sin\alpha\cos\varphi\end{cases}$$

用一次近似方法判别零解的稳定性。其中 A,e,R,C,n 都是常数，且 $c^2n^2\neq 4AeR$。

8. 对于微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y+x^3,\ \frac{dy}{dt}=-2(x+y)+y^3,$$

作出二次型的 V 函数，判别零解的稳定性。

9. 对于微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+f(y),\ \frac{dy}{dt}=cx+ky,f(0)=0,a+d<0.$$

用类比法作 V 函数，研究函数 $f(x)$ 适合什么条件，零解是渐近稳定的。

10．对于三阶微分方程

$$\frac{d^3x}{dt^3}+a\frac{d^2x}{dt^2}+f\left(\frac{dx}{dt}\right)+g(x)=0,$$

用类比法作出 V 函数，给出零解渐近稳定的充分条件。

11．对于微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)=0,$$

用能量法作 V 函数，研究其零解的稳定性。

12．对于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-f_1(x)-f_2(y),\\ \dfrac{dy}{dt}=f_3(x)-f_4(y)\end{cases}$$

其中 $\operatorname{sgn} f_i(x)=\operatorname{sgn} x(i=1,2,3,4)$．用分离变量法作出 V 函数，讨论零解的稳定性．

13．对于二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\frac{dx}{dt}\right),\ f(0,0)=0.$$

用分离变量法作出 V 函数，给出零解渐近稳定的充分条件。

14．对于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y+z+y^3,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y+2z+x^2y,\\ \dfrac{dz}{dt}=x+2y+z+x^2y^2,\end{cases}$$

（1）用一次近似方法判别零解的稳定性；

（2）作二次型的 V 函数，判别零解的稳定性。

15．对于微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y-3x-x^3,$$

$$\frac{dy}{dt}=6x-2y,$$

作二次型的 V 函数，判别零解的稳定性.

16. 一个质点在非线性恢复力作用下的运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x-x^3=0,$$

试用李雅普诺夫直接方法讨论平衡位置 $x=0$，$\dot{x}=0$ 的稳定性.

17. 对于微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y+ax^3,\ \frac{dy}{dt}=x+ay^3,$$

(1) 能否用一次近似方法判别零解的稳定性?

(2) 用 $V(x,y)=x^2+y^2$ 讨论零解的稳定性.

18. 对于微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-2x-3y,$$

作二次型的 V 函数，判别零解的稳定性.

19. 讨论

$$\frac{dx}{dt}=-y+x^3,\quad \frac{dy}{dt}=x+ay+y^3,$$

的零解的稳定性.

20. 对于微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+x^2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-9x-6y+xy^3,\end{cases}$$

作二次型的 V 函数，判别零解的稳定性.

21. 设方阵 A 的一切特征值适合 $\mathrm{Re}\lambda(A)<-\alpha<0$；方阵值函数 $B(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\|B(t)\|\leqslant K$，证明：当 $0<\varepsilon<\frac{\alpha}{Mk}$ 时，微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=[A+\varepsilon B(t)]x$$

的零解是渐近稳定的. 其中 M 由 $\|e^{At}\|\leqslant Me^{-\alpha t}(t\geqslant 0)$ 确定.

22. 验证定正函数的判别法 2° 的证明中，作出的函数 $a(r)$ 是 K 类函数.

§4 飞机自动驾驶仪的控制问题

一、飞机的自动驾驶仪问题

前面我们讨论的是"在李雅普诺夫意义下的稳定性"，所研究的都是在原点的充分小的邻域内轨线的性态。但是，在工程技术应用中，特别在自动控制系统中，控制系统元件的非线性在较大的扰动下必然会产生影响。因此，在应用中不但要考虑在相当小的初始偏差下运动的性态，而且需要研究在"任意的初始偏差"下运动的性态，于是存在着一个全局稳定性问题。下面，我们以飞机的航向自动驾驶仪问题为例加以说明。

图 9.15 是一架飞机的自动驾驶仪的结构示意图。为了清楚起见，机件都放在机体外面。假设飞机作水平飞行，希望保持定向航行。

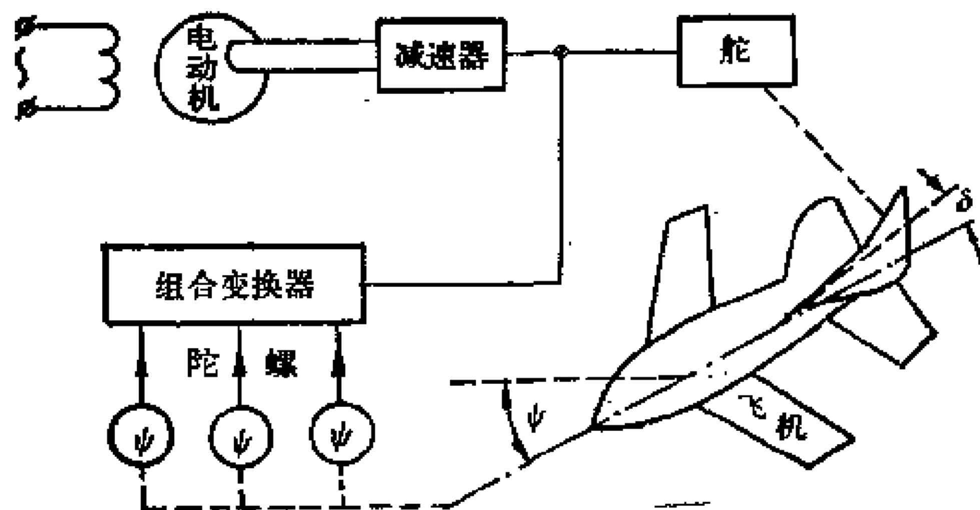


图 9.15

由于外界许多因素的影响，机身的轴线与指定的航向产生偏差角 ψ。若将飞机的尾舵转过一个 δ 角，则由于迎面而来的阻力产生关于飞机质心的力矩，可以消除 ψ 角的偏差。飞机的自动驾驶仪就是自动地完成这一任务的。

利用回转仪的定向特性，可以测出 $\psi,\dot{\psi}$ 和 $\ddot{\psi}$，然后把这些作为信号输入到一个组合变换器中，进行线性组合并转化为电流，再将这个变化的电流通入一个电动机的一部分激磁绕组中去．电动机的转动，通过一个减速器操纵尾舵的移动，并假定有一个反馈信号输入到组合变换器中．

利用动量矩定律，飞机的 ψ 角可以近似地归结为满足二阶线性微分方程

$$T^2\ddot{\psi}+U\dot{\psi}+h\psi=-\delta. \tag{1}$$

组合变换器的作用是使电流 I 满足

$$I=a\psi+b\dot{\psi}+c\ddot{\psi}-d\delta. \tag{2}$$

设尾舵的作用适合方程

$$\dot{\delta}=\varphi(I), \tag{3}$$

其中 $\varphi(I)$是非线性函数，它反映了电动机的特性是非线性的，并且适合条件：

$$I\varphi(I)>0 \quad (\text{当 } I\neq 0 \text{ 时}). \tag{4}$$

条件(4)表示当电流 I 为正向时，使 δ 增加；当 I 为反向时，使 δ 减少．由于 $\varphi(I)$的特性一般知道得并不确切，而且在实际工作时，其特性也会发生变化，因此，我们希望只利用性质(4) 来研究调节系统的稳定性问题．

另一方面，由于飞机在飞行中所遇到的干扰难以估计，扰动的量不一定是很小的．因此我们还希望，不仅仅研究未干扰运动的邻近运动的性质，而且允许初始干扰值很大．

将飞机自动驾驶仪问题所讨论的方程(1)～(3)一般化，就要讨论非线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\delta,\\ \dfrac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}=\varphi(\sigma),\\ \sigma=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})-\rho\delta.\end{cases} \tag{5}$$

的稳定性问题，其中 A 表示 $n\times n$ 阶常值矩阵，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 表示 $n\times 1$ 向量，$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})$表示向量 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的内积。

二、全局渐近稳定性

现在，我们讨论上述非线性方程组(5)。

这里，系统的输出量 $\boldsymbol{x}$ 经过测量后并不直接作为反馈量去进行控制，而是经过一个放大器(例如，伺服电动机等) 作用。因此，通常称系统(5)为间接自动调节系统，而把 $\rho=0$ 所对应的系统，称为直接自动调节系统。

图 9.16 是间接调节系统(5)的框图。

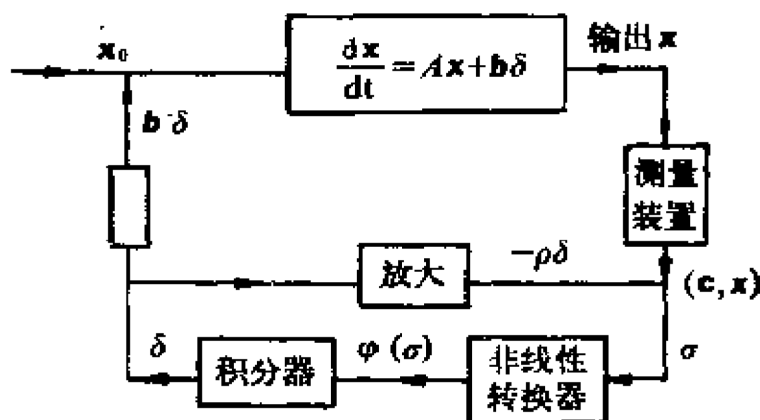


图 9.16

假设函数 $\varphi(\sigma)$是满足条件 $\varphi(0)=0$ 及

$$\sigma\varphi(\sigma)>0 \quad (\sigma\neq 0\text{ 时}) \tag{6}$$

的连续函数，它的其他性质并不清楚。我们要解决的问题是：对于适合上述条件的任何连续函数，如何选择系统(5)的参数 $A,\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{c}$ 及 ρ，使得(5)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o},\delta=0$ 是稳定的，并且任何初始扰动所引起的运动 $\boldsymbol{x}(t)$和 $\delta(t)$随着时间 t 趋向无穷大而趋于零。为了解决上述问题，我们先引进全局渐近稳定性的概念。

定义 1 如果微分方程组

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

的零解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$在李雅普诺夫意义下是稳定的，并且对于任意的$\boldsymbol{x}_0\in R^n$，以$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$为初始值的解$\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$在$(t_0,\infty)$上存在，且满足

$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0},$$

则称方程组(7)的零解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$是全局渐近稳定的。

由此可知，零解为全局渐近稳定，就是要求它不但在李雅普诺夫意义下渐近稳定，而且其渐近稳定域(吸引域)是全空间R^n。对于线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x},$$

容易证明，零解的渐近稳定性和全局渐近稳定性是等价的。但是，对于非线性系统，渐近稳定的零解不一定是全局渐近稳定的.

下面，我们用V函数的方法研究全局渐近稳定性的问题。为了讨论全局渐近稳定性的需要，把过去$V(t,\boldsymbol{x})$在$[t_0,\infty)\times C_H$上定义，改为在$[t_0,\infty)\times R^n$上定义，并引进无限大定正函数及具有无穷小上界的概念。

定义 2 如果

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to0}V(t,\boldsymbol{x})=0$$

关于$t\in[t_0,+\infty)$一致地成立，则称$V(t,\boldsymbol{x})$具有无穷小上界；如果

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to+\infty}V(t,\boldsymbol{x})=+\infty$$

关于$t\in[t_0,+\infty)$一致地成立，则称$V(t,\boldsymbol{x})$为无限大定正函数。

由此可见，当$V(t,\boldsymbol{x})$为无限大定正函数时，对于任意给定的$M>0$，存在$R>0$，使得当$\|\boldsymbol{x}\|>R$时，

$$V(t,\boldsymbol{x})>M\qquad(t\geqslant t_0).$$

现在，我们叙述并证明一个全局渐近稳定性的基本定理。

定理 1 对于微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\tag{8}$$

设$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{o})\equiv\boldsymbol{o}$。如果存在$V(t,\boldsymbol{x})$在$[t_0,\infty)\times R^n$上连续可微，在全空间定正，并具有无穷小上界，并且$V(t,\boldsymbol{x})$是无限大定正函数，使得$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$

在全空间定负，则方程组(8)的零解 $x=o$ 是全局渐近稳定的。

证 根据 §2 的定理 1，方程组(8) 的零解是稳定的。需要证明的是：对于任意的 $x_0\in R^n$，以 (t_0, x_0) 为初始值的解 $x(t)=x(t;t_0,x_0)$ 适合

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)=o.$$

首先，根据 $V(t,x)$ 定正，$\frac{dV}{dt}$ 定负，容易得知

$$\lim_{t\to+\infty} V(t,x(t))=V_\infty$$

存在，且 $V_\infty\geqslant 0$。假定 $V_\infty>0$，那末根据 $\frac{dV}{dt}$ 定负，当 $t_0\leqslant t<+\infty$ 时，有

$$V(t_0,x_0)\geqslant V(t,x(t))\geqslant V_\infty>0.$$

由于 $V(t,x)$ 是无限大定正函数，所以对于 $V(t_0,x_0)>0$，存在 $R>0$，使得当 $\|x\|>R$ 时，成立

$$V(t,x)>V(t_0,x_0).$$

因此，当 $t\geqslant t_0$ 时，有

$$\|x(t)\|\leqslant R.$$

另一方面，$V(t,x)$ 具有无穷小上界，所以对于 $V_\infty>0$，存在数 $\lambda>0$，使得当 $\|x\|<\lambda$ 时，有

$$V(t,x)<V_\infty \qquad (t\geqslant t_0).$$

因此，当 $t\geqslant t_0$ 时，成立

$$\lambda\leqslant\|x(t)\|\leqslant R.$$

根据 $\frac{dV}{dt}$ 定负，存在 K 类函数 $a(r)$，使得

$$\frac{dV(t,x)}{dt}\leqslant -a(\|x\|).$$

置

$$l=\inf_{\lambda\leqslant\|x\|\leqslant R} a(\|x\|)>0,$$

从而

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant V(t_0,\boldsymbol{x}_0)-l(t-t_0).$$

上式右端当 $t\to+\infty$ 时趋向于 $-\infty$，这与 $V(t,\boldsymbol{x})$ 的定正性矛盾。所以 $V_\infty>0$ 不成立，即

$$\lim_{t\to+\infty}V(t,\boldsymbol{x}(t))=0.$$

从而，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\mu=\inf\limits_{\varepsilon\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant R}b(\|\boldsymbol{x}\|)$，$b\in K$，存在 $T>0$，当 $t>T$ 时，有

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))<\mu,$$

又

$$V(t,\boldsymbol{x})\geqslant b(\|\boldsymbol{x}\|),$$

（当 $t\geqslant t_0,\boldsymbol{x}\in R^n$）。所以，当 $t>T$ 时

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{o}.$$

三、调节系统的绝对稳定性

现在，我们讨论方程组(5)的零解的全局渐近稳定性。

定义 3 如果对于一切满足条件(6)的连续函数 $\varphi(\sigma)$，方程组(5)的零解都是全局渐近稳定的，则称方程组(5)是绝对稳定的。

对于间接调节系统(5)，鲁里叶(А.И.Лурье)提出下列问题：参数 $A,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和 ρ 满足什么条件，方程组(5)是绝对稳定的?

下面用 V 函数的方法解决这一问题，这是用李雅普诺夫直接方法解决实际问题的一个很好的例子。

我们假设矩阵 A 是稳定阵，即它的一切特征值都具有负实部。首先，对方程组(5)作变换

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\delta,\\ \sigma=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{x})-\rho\delta,\end{cases}\tag{9}$$

在上述变换下，方程组(5)变成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}\varphi(\sigma),\\ \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{y})-\rho\varphi(\sigma).\end{cases}\tag{10}$$

下面的引理给出方程组(5)和(10)的零解渐近稳定性等价的条件，并指出系统(5)是绝对稳定的必要条件。

引理 1° 当 $\rho+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，矩阵

$$G=\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\rho \end{pmatrix}$$

是非奇异的。

2° 系统(10)是绝对稳定的必要条件为：矩阵 A 的一切特征值适合

$$\operatorname{Re}\lambda(A)\leqslant 0.$$

证 若 A,B 和 C,D 都是分块方阵，且 A 和 D 是非奇异的，则利用行列式性质可以证明(证明留给读者完成)

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\det A\cdot\det(D-CA^{-1}B)=\det D\cdot\det(A-BD^{-1}C).$$

因此，当 $\rho+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，有

$$\det G=\det A\cdot(-\rho-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b})\neq 0.$$

当系统(10)是绝对稳定时，对于 $\varphi(\sigma)=\varepsilon\sigma(\varepsilon>0)$，相应的线性系统的零解是渐近稳定的，其系数阵为

$$B(\varepsilon)=\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b}\varepsilon \\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & -\rho\varepsilon \end{pmatrix}.$$

显然，$B(0)$的特征值由 A 的特征值及 $\lambda=0$ 组成。假定 A 存在特征值 λ^*，使得 $\operatorname{Re}\lambda^*>0$。根据 $B(\varepsilon)$的特征值 $\lambda(\varepsilon)$对 ε 的连续性，得知当 $\varepsilon>0$ 充分小时，$B(\varepsilon)$具有正实部的特征值。从而，当 $\varphi(\sigma)=\varepsilon\sigma(\varepsilon>0$ 充分小)时，(10)的零解是不稳定的，得到矛盾。

下面介绍鲁里叶作的一种特殊的 V 函数：二次型加上积分项，然后根据全局渐近稳定性的定理，得到系统(5)是绝对稳定的充分条件。

置

$$V(\boldsymbol{y},\sigma)=(\boldsymbol{y},\ B\boldsymbol{y})+\int_0^{\sigma}\varphi(s)\mathrm{d}s,\tag{11}$$

其中矩阵 $B>0$(正定阵)，$B^{\mathrm{T}}=B$，待定。

定理 2 设矩阵 A 是稳定阵，且存在正定阵 $D>0$，使得矩阵方程

$$A^{\mathrm{T}}B+BA=-D \tag{12}$$

的解 B 及参数 $\rho,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 适合

$$\rho>\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right)^{\mathrm{T}}D^{-1}\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right), \tag{13}$$

则系统(10)是绝对稳定的。

证 因为 A 是稳定阵，所以根据§3 的引理矩阵方程(12)存在唯一的对称、正定解 B。因此，$V(\boldsymbol{y},\sigma)$在全空间是定正的，且 $V(\mathbf{0},0)=0$。又 $V(\boldsymbol{y},\sigma)$不含时间 t，所以由 $V(\boldsymbol{y},\sigma)$的连续性得知它具有无穷小上界。

又
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{y},\sigma)}{\mathrm{d}t}&=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t},B\boldsymbol{y}\right)+\left(\boldsymbol{y},B\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}\right)+\varphi(\sigma)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\\&=((A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}\varphi(\sigma)),B\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},B(A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}\varphi(\sigma)))\\&\quad+\varphi(\sigma)[(\boldsymbol{c},\boldsymbol{y})-\rho\varphi(\sigma)]\\&=(\boldsymbol{y},(A^{\mathrm{T}}B+BA)\boldsymbol{y})+\varphi(\sigma)\cdot2\left(\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right),\boldsymbol{y}\right)\\&\quad-\rho\varphi^2(\sigma).\end{aligned}$$

从而，$\dfrac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{y},\sigma)}{\mathrm{d}t}$是关于 $\boldsymbol{y},\varphi(\sigma)$的二次型，它为定负的充要条件是：

矩阵

$$\begin{pmatrix}D & -\left(B\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right)\\ -\left(B\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right)^{\mathrm{T}} & \rho\end{pmatrix}$$

是正定阵。这等价于 $D>0$ 且

$$\det\begin{pmatrix}D & -\left(B\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right)\\ -\left(B\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{2}\right)^{\mathrm{T}} & \rho\end{pmatrix}>0.$$

根据引理的证明中用到的行列式计算公式，得到

$$\det\begin{pmatrix} D & -\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right) \\ -\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right)^{\mathrm{T}} & \rho \end{pmatrix}$$

$$=\det D\cdot\left[\rho-\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right)^{\mathrm{T}}D^{-1}\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right)\right].$$

根据 $D>0$ 及条件(13)，得知$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是在全空间定负的函数。

从定理 1 的证明过程可以看出，如果我们从定理的条件能够证明解 $\boldsymbol{y}(t)$有界,则方程组(10)的零解是全局渐近稳定的。

置

$$U=\{(\boldsymbol{y},\sigma)\,|\,V(\boldsymbol{y},\sigma)<M,\,|\sigma-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{y}|<N\}.$$

对于任意的 $\boldsymbol{y}_0\in R^n,\sigma\in R$,可选 M,N 充分大,使得点 $P(\boldsymbol{y},\sigma)\in U$。下面只要证明：从 P 点出发的轨线当 $t>0$ 时一直停留在区域 U 内，根据区域 U 的有界性即得证。

事实上，根据$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$定负,得到

$$V(\boldsymbol{y}(t),\sigma(t))\leqslant V(\boldsymbol{y}_0,\sigma_0)<M\quad(t>0).$$

又

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma_{(t)}-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{y}_{(t)})=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}(t)-\rho\varphi(\sigma(t))-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}(A\boldsymbol{y}(t)$$

$$+\boldsymbol{b}\varphi(\sigma(t)))=-(\rho+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}b)\varphi(\sigma(t)).$$

如果能够证明：$\rho+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b}>0$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sigma(t)-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{y}(t)]<0.$$

从而方程组(10) 的轨线不会穿出 U 的边界：$\sigma-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{y}=\pm N$。下面我们证明：$\rho+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b}>0$。由于条件(13)成立,只需证

$$\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right)^{\mathrm{T}}D^{-1}\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}\right)\geqslant-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

假定

$$-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b}>\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}\right)^{\mathrm{T}}D^{-1}\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}\right).$$

置

$$\rho^*=-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b},$$

则

$$\det\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} & -\rho^* \end{pmatrix}=-\det A\cdot(\rho^*+\mathbf{c}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{b})=0.$$

所以，方程组

$$\begin{cases} A\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}\varphi(\sigma)=0, \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\rho^*\varphi(\sigma)=0. \end{cases}$$

存在非零解：$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0^*, \sigma=\sigma_0^*$。从而得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{y}_0^*,\sigma_0^*)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{y}}(A\boldsymbol{y}_0^*+\boldsymbol{b}\varphi(\sigma_0^*))+\frac{\partial V}{\partial \sigma}(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_0^*-\rho^*\varphi(\sigma_0^*)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

另一方面，$\rho^*>\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}\right)^{\mathrm{T}}D^{-1}\left(B\boldsymbol{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}\right)$，从而 $\frac{\mathrm{d}V(y,\sigma)}{\mathrm{d}t}$ 定负，得到矛盾。

研究调节系统的绝对稳定性问题，除了上面介绍的 V 函数方法以外，还有波波夫(Popov)的频率特性法。而且理论上已经证明，这两种方法所得到的结果是等价的。下面我们不加证明地叙述波波夫方法的结果。

定理 3　设矩阵 A 是稳定阵。如果存在 $q\geqslant 0$，使得对于一切实的 ω 值，有

$$\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}\omega q)G(\mathrm{i}\omega)\geqslant 0,$$

其中

$$G(\mathrm{i}\omega)=N(\mathrm{i}\omega)+\frac{\rho}{\mathrm{i}\omega},$$

$$N(\mathrm{i}\omega)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\nu(t)\mathrm{d}t,$$

$$\nu(t) = -(\boldsymbol{c}, e^{At}\boldsymbol{b}),$$

则间接调节系统(5)是绝对稳定的。

习　　题

1. 若 A,B 和 C,D 都是分块方阵，且 A 和 D 是非奇异的，试证明：

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B) = \det D \cdot \det(A - BD^{-1}C).$$

(**提示**：对原矩阵乘适当的方块阵。)

2. 对于间接控制系统

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y + \varphi(\sigma),$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2ax + 2y - 2\varphi(\sigma), \varphi(\sigma)\text{满足}, \varphi(0) = 0, \sigma\varphi(\sigma) > 0.$$

(1) 取正定阵 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，确定正的参数 a 的范围，使该系统是绝对稳定的。

(2) 取正定阵 $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，确定参数 a 的范围，使该系统是绝对稳定的。

第十章　常微分方程的数值解法

在前面的几章中，我们研究了常微分方程的初等解法以及线性常系数方程的代数解法。但是，由实际问题归结出来的大量是非线性方程或线性变系数的方程组，往往不可能用初等函数来表出它们的解。于是求解常微分方程的问题的另一种途径是利用计算机进行数值计算。本章我们介绍一些在计算机上实用的常微分方程数值解法。

为了叙述简便起见，我们一般只讨论单个微分方程，所介绍的方法也适用于微分方程组。

§1　初值问题的数值解法

现在来研究初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,x(t)),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\tag{1}$$

其中函数 $f:[t_0,t_0+T]\times R\to R$ 连续且关于 x 满足李普希兹条件：对一切 $t\in(t_0,t_0+T]$ 和任意的 $x,y\in R$，成立

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L|x-y|,$$

其中 $L>0$ 是常数。在这些条件下，初值问题(1)的解是存在唯一的，问题是如何求解。第五章介绍的毕卡逐次逼近法可用来求解，但是通常在计算机上用的是离散化的方法。

先将自变量 t 在求解的范围 $[t_0,t_0+T]$ 内离散化。例如可以这样进行：取定一步长 h，置 $t_k=t_0+kh(k=1,2,\cdots,n)$，使 $t_n=t_0+T$。于是问题归结为知道 $x(t_k)$ 后如何计算 $x(t_{k+1})$，其中 $x(t_k)$ 表示精确解 $x(t)$ 在 $t=t_k$ 时的值。下面用 x_k 表示用数值解法得到的 $x(t_k)$ 的近

似值。

将解 $x(t)$ 展开成泰勒级数

$$x't+h)=x(t)+h\dot{x}(t)+\frac{1}{2}h^2\ddot{x}(t)+\cdots, \tag{2}$$

其中

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t)),$$

$$\ddot{x}(t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{x}(t)\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial t}+f(t,\ x(t))\frac{\partial f}{\partial x},$$

等等都可以算出。问题在于上述展开式有无穷多项，实际计算只能算到有限项而加以“截断”，那末“截断”误差是多少呢？在哪一项截断能达到所要求的精确度呢？

一、欧拉法和霍恩法

如果在 $x(t)$ 的展开式(2)中第二项截断，就得到欧拉方法：

$$x_{k+1}=x_k+hf(t_k,x_k). \tag{3}$$

它相当于用差商 $\frac{x_{k+1}-x_k}{h}$ 来代替导数 $\dot{x}(t_k)$。在几何上表示用折线来逼近积分曲线 $x(t)$。所以这种方法也称为欧拉折线法（参看图 10.1）。

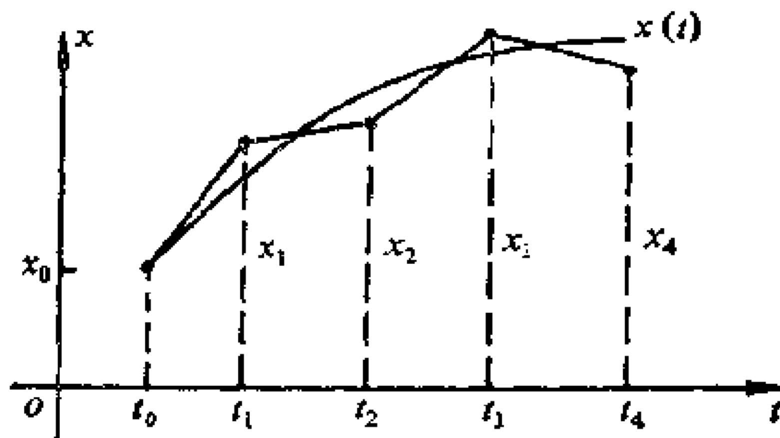


图 10.1

下面估计当 $t_k\leqslant t_0+h$ 时用 x_k 近似 $x(t_k)$ 所产生的误差。首先，$x(t_0),x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n)$ 满足差分方程

$$x(t_{k+1})=x(t_k)+hf(t_k,x(t_k))+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\ \frac{\partial f}{\partial x}\right](\xi_k,x(\xi_k)), \tag{4}$$

其中 $t_k<\xi_k<t_{k+1}$。由(3)、(4)得到

$$x(t_{k+1})-x_k=x(t_k)-x_k+h[f(t_k,x(t_k))-f(t_k,x_k)]$$
$$+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial x}\right](\xi_k,x(\xi_k)).$$

而由微分中值定理，我们有

$$f(t_k,x(t_k))-f(t_k,x_k)=\frac{\partial f(t_k,\eta_k)}{\partial x}[x(t_k)-x_k],$$

其中 η_k 是 $x(t_k)$ 和 x_k 之间的某个数。从而，得

$$|x(t_{k+1})-x_{k+1}|\leqslant|x(t_k)-x_k|+h\left|\frac{\partial f(t_k,\eta_k)}{\partial x}\right||x(t_k)-x_k|$$
$$+\frac{h^2}{2}\left|\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial t}\right](\xi_k,x(\xi_k))\right|.$$

设 $\overline{R}$ 表示闭矩形区域：$t_0\leqslant t\leqslant t_0+a$，$|x-x_0|\leqslant b$。

置 $h^*=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$，　$M=\max\limits_{(t,x)\in\overline{R}}|f(t,x)|$，

$$L=\max_{(t,x)\in\overline{R}}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|,\qquad N=\max_{(t,x)\in\overline{R}}\left|\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial x}\right|.$$

容易证明，$(\xi_k,x(\xi_k))$、(t_k,x_k)都位于 $\overline{R}$ 内，所以

$$|x(t_{k+1})-x_{k+1}|\leqslant|x(t_k)-x_k|+Lh|x(t_k)-x_k|+\frac{Nh^2}{2}. \tag{5}$$

我们用 $E_k=|x(t_k)-x_k|$ 表示在欧拉法的第 k 步，用 x_k 代替 $x(t_k)$所产生的误差，则

$$E_{k+1}\leqslant E_k(1+Lh)+\frac{Nh^2}{2}\quad(k=0,1,\cdots,n-1), \tag{6}$$

其中　$E_0=0$。

用归纳法，得到

$$E_k \leqslant \frac{Nh}{2L}[(1+Lh)^k - 1]$$

$$\leqslant \frac{Nh}{2L}[(e^{Lh})^k - 1] \leqslant \frac{Nh}{2L}[e^{Lhk} - 1] = Ph. \tag{7}$$

一般地，若某种数值解法的误差满足

$$E_k \leqslant Ph^\sigma$$

则称此解法为 σ 阶方法（即具有 σ 阶准确度的离散化方法）。由（7）可见，欧拉法是一阶方法。

例 1 用欧拉方法求解下列初值问题（执行 5 步）：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$.

解 $f(t,x) = x$，因此，欧拉法的数值计算格式为

$$x_{n+1} = x_n + 0.1x_n = 1.1x_n.$$

逐步计算的结果如下：

n	t_n	x_n	$1.1x_n$	$x(t_n)$	误差的绝对值
0	0.0	1.000	1.100	1.000	0
1	0.1	1.100	1.210	1.105	0.005
2	0.2	1.210	1.331	1.221	0.011
3	0.3	1.331	1.464	1.350	0.019
4	0.4	1.464	1.610	1.492	0.028
5	0.5	1.610	1.771	1.648	0.038

本例的精确解为

$$x(t) = e^t.$$

从误差看出，欧拉法的计算结果比较粗糙。从前面的分析知道，原因在于它是一阶方法。

下面介绍一种在欧拉法的基础上改进的数值方法——霍恩法。霍恩法的数值计算格式是

$$\begin{cases} x_{n+1}^{*} = x_n + hf(t_n, x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^{*})]. \end{cases}$$

它的特点是，每计算新的一点的值，先用欧拉法计算出辅助值 x_{n+1}^{*}，然后再按第二个公式进行"校正"，按第一个公式计算只是"预估"，得到的是较粗糙的近似值，"校正"后得到较精确的近似值。因此，霍恩法是一种预估-校正的方法. 可以证明，霍恩法是一个二阶的方法。事实上，

$$x(t) + \frac{h}{2}[f(t, x(t)) + f(t+h, x(t) + hf(t, x(t)))]$$

$$= x + \frac{h}{2} f + \frac{h}{2}\left[f + h\frac{\partial f}{\partial t} + hf\frac{\partial f}{\partial x} + o(h^2)\right]$$

$$= x + hf + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x}\right] + o(h^3)$$

$$= x(t+h) + o(h^3).$$

下面来说明上述两种方法的基本思想. 我们知道，方程(1) 的解 $x(t)$ 在 t_{k+1} 处的精确值等于

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s))\mathrm{d}s.$$

右边的积分表示曲线 $f(t, x(t))$ 在区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 上所围成的曲边梯形的面积，这个面积的一个粗糙的近似值是 $hf(t_k, x(t_k))$，即图 10.2(a) 中矩形 D 的面积. 其数值计算格式为

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k).$$

这就是欧拉法. 显然，用图 10.2(b)中梯形 W 的面积作为曲边梯形的面积的近似值，更为精确，即

$$\frac{h}{2}[f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1})].$$

由于第二项中出现未知值 x_{k+1}，遇到了困难. 霍恩法选取欧拉法所得到的 x_{k+1}^{*} 来代替它。因此，霍恩法也称为改进的欧拉法。

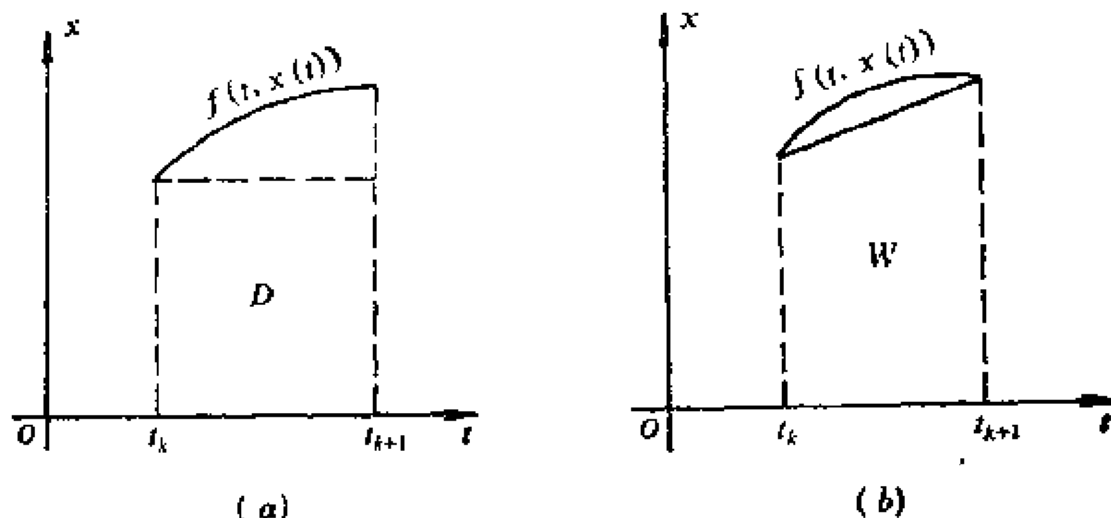


图 10.2

例 2 用霍恩法计算下列初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

执行 5 步,并取步长 $h = 0.1$。

解 霍恩法的数值计算格式为

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n + hx_n = 1.1x_n, \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{h}{2}[x_n + x_{n+1}^*] = 1.105\, x_n. \end{cases}$$

逐步计算的结果如下:

n	t_n	x_n	$1.105\,x_n$	$x(t_n)$	误差的绝对值
0	0.0	1.000	1.105	1.000	0
1	0.1	1.105	1.221	1.105	0
2	0.2	1.221	1.349	1.221	0
3	0.3	1.349	1.491	1.350	0.001
4	0.4	1.491	1.648	1.492	0.001
5	0.5	1.648		1.648	0

显然,用霍恩法计算的精度比欧拉法高。一般地,数值方法的截断误差的阶越高,计算的精度也越高。但是,计算机本身受到字长的限制,在计算过程中,舍入误差的累积和传播会影响计算的精度。这涉及

到计算的数值稳定性问题。用某种数值解法，其截断误差的阶数虽很高，但计算达不到所要求的精度，那末怎么办？一方面，可深入分析所用方法的稳定性，另一方面，在应用中通常采取变步长的方法。虽然我们事先不知道应该选取怎样的步长 h 才能达到所要求的精确度，但可以先选定一个步长 h，计算出 $x_1,x_2,\cdots,x_N$；然后，取步长 $h/2$，重复计算相应的 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，再将两次计算的结果比较，如果计算的精度不满足要求，就再改变步长，继续计算下去，直到达到所要求的精度为止。

我们仍讨论例 2。若改取步长 $h/2=0.05$，则霍恩法的数值计算格式为：

$$\begin{cases} x_{n+1}^{*}=1.05\,x_n, \\ x_{n+1}=x_n+\dfrac{h}{2}[x_n+x_{n+1}^{*}]=1.051\,x_n. \end{cases}$$

逐步计算的结果如下：

n	t_n	x_n	$1.051\,x_n$
0	0.0	1.000	1.051
1	0.05	1.051	1.105
2	0.10	1.105	1.221
3	0.15	1.221	1.349
4	0.20	1.349	1.419
5	0.25	1.419	1.491
6	0.30	1.491	

这时，计算得到的 x_2,x_4,x_6 和例 2 中的 x_1,x_3,x_5 的前三位小数相同。

二、龙格-库塔法和吉尔法

现在，我们介绍一种四阶的方法：龙格-库塔法。由于它计算简单、精确度高，因此成为解初值问题的最实用的数值方法之一。我们知道，用泰勒展开法可以计算 $x(t_k)$ 的近似值，但是需要知道函数 f 的高阶导数的值。龙格—库塔法的基本思想是用 f 在不同的点上的值的线性组合取代高阶导数的值，达到高精度的结果。以下是四阶龙格-库塔

法，每步需计算四次 f 的值。

置

$$K_1=f(t,x),$$
$$K_2=f(t+c_2h,x+ha_{21}K_1),$$
$$K_3=f(t+c_3h,x+h\sum_{j=1}^{2}a_{3j}K_j),$$
$$K_4=f(t+c_4h,x+h\sum_{j=1}^{3}a_{4j}K_j),$$

其中

$$c_2=a_{21},$$
$$c_3=\sum_{j=1}^{2}a_{3j},$$
$$c_4=\sum_{j=1}^{3}a_{4j},$$
$$x(t+h)\approx x(t)+h\sum_{j=1}^{4}b_jK_j.$$

作泰勒展开，比较系数以使双方的到 h^4 为止的项相同（即取代到 4 阶为止的导数项）使截断误差为 $O(h^5)$。于是，得

$$\begin{cases} b_1+b_2+b_3+b_4=1, \\ b_2c_2+b_3c_3+b_4c_4=\dfrac{1}{2}, \\ b_2c_2^2+b_3c_3^2+b_4c_4^2=\dfrac{1}{3}, \\ b_3a_{32}c_2+b_4a_{42}c_2+b_4a_{43}c_3=\dfrac{1}{6}, \\ b_2c_2^3+b_3c_3^3+b_4c_4^3=\dfrac{1}{4}, \\ b_3c_3a_{32}c_2+b_4c_4a_{42}c_2+b_4c_4a_{43}c_3=\dfrac{1}{8}, \\ b_3a_{32}c_2^2+b_4a_{42}c_2^2+b_4a_{43}c_3^2=\dfrac{1}{12}, \\ b_4a_{43}a_{32}c_2=\dfrac{1}{24}. \end{cases} \tag{8}$$

上述方程组(8)的解不是唯一的。

若选取其解为

$$b_1=\frac{1}{6},\qquad b_2=b_3=\frac{1}{3},\qquad b_4=\frac{1}{6},$$

$$c_2=a_{21}=\frac{1}{2},$$

$$c_3=a_{32}=\frac{1}{2},\qquad a_{31}=0,$$

$$c_4=a_{43}=1,\qquad a_{41}=a_{42}=0,$$

则对应于经典的龙格—库塔法，其计算格式是

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4), \tag{9}$$

其中

$$K_1=f(t_n,x_n),$$

$$K_2=f\left(t_n+\frac{h}{2},\quad x_n+\frac{1}{2}hK_1\right),$$

$$K_3=f\left(t_n+\frac{h}{2},\quad x_n+\frac{h}{2}K_2\right),$$

$$K_4=f(t_n+h,x_n+hK_3).$$

如果我们选取(8)的另一个解

$$b_1=b_4=\frac{1}{8},\qquad b_2=b_3=3/8,$$

$$c_2=a_{21}=\frac{1}{3},$$

$$c_3=2/3,\quad a_{31}=-\frac{1}{3},\quad a_{32}=1,$$

$$c_4=1,\quad a_{41}=1,\quad a_{42}=-1,\quad a_{43}=1,$$

则相应的龙格—库塔法的计算格式为

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{8}(K_1+3K_2+3K_3+K_4), \tag{10}$$

其中

$$K_1 = f(t_n, x_n),$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{1}{3}h, \quad x_n + \frac{1}{3}hK_1\right),$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{2}{3}h, \quad x_n - \frac{1}{3}hK_1 + hK_2\right),$$

$$K_4 = f\ (t_n + h, \quad x_n + hK_1 - hK_2 + hK_3).$$

龙格–库塔法利用公式(9)或(10)，从 x_n 计算出 x_{n+1}，这是一种单步方法，它在一个步长内分成四级(对应于 4 个K 值)，因此是一种单步4级的方法。

例 3 用经典的龙格–库塔法求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

取步长 $h = 0.1$，执行 5 步。

解 按龙格–库塔法分式(8)，数值计算的格式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{0.1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ K_1 = x_n, \\ K_2 = x_n + 0.05K_1 = 1.05x_n, \\ K_3 = x_n + 0.05K_2 = 1.0525x_n, \\ K_4 = x_n + 0.1K_3 = 1.10525x_n, \end{cases}$$

即

$$x_{n+1} = 1.10517x_n.$$

逐步计算的结果如下：

n	t_n	x_n	$1.10517x_n$	$x(t_n)$	误差的绝对值
0	0.0	1.000	1.105	1.000	0
1	0.1	1.105	1.221	1.105	0
2	0.2	1.221	1.349	1.221	0
3	0.3	1.349	1.492	1.350	0.001
4	0.4	1.492	1.648	1.492	0
5	0.5	1.648	1.822	1.648	0

从上表可以看出，用龙格-库塔法计算的精度比较高。

如果我们选取方程组(8)的解为

$$b_1=\frac{1}{6},\qquad b_2=\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right),\qquad b_3=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

$$b_4=\frac{1}{6},$$

$$c_2=c_3=a_{21}=\frac{1}{2},\qquad c_4=1,$$

$$a_{31}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1),\qquad a_{32}=1-\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$a_{41}=0,\quad a_{42}=-\sqrt{\frac{1}{2}},\qquad a_{43}=1+\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

则得到吉尔法的计算公式：

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h}{6}\left[K_1+\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)K_2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)K_3+K_4\right],$$

其中

$$K_1=f(t_n,x_n),$$
$$K_2=f\left(t_n+\frac{h}{2},\quad x_n+\frac{K_1h}{2}\right),$$
$$K_3=f\left(t_n+\frac{h}{2},x_n+\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)K_1h+\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)K_2h\right);$$
$$K_4=f\left(t_n+h,\ x_n+\sqrt{\frac{1}{2}}K_2h+\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)hK_3\right).$$

吉尔法与上面的龙格-库塔法是同一种方法，利用它编制电子计算机程序较为简短。

三、求解二阶方程初值问题的尼斯特莱姆法

本节要求解二阶方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,x,\dfrac{dx}{dt}\right),\\ x(t_0)=x_0,\quad \dot{x}(t_0)=\dot{x}_0.\end{cases}\tag{11}$$

假设初值问题(11)的解是存在唯一的。由于作变换 $t_1=t-t_0$ 可将初始时刻变成 0，下面考虑初值问题

$$\begin{cases}\ddot{x}=f(t,x,\dot{x}),\\ x(0)=x_0,\quad \dot{x}(0)=\dot{x}_0.\end{cases}\tag{12}$$

尼斯特栾姆法的原理类似于龙格-库塔法，用在几个不同的点上的右端函数值的线性组合，来代替泰勒展开中的高阶导数，达到较高的精度。

单步 4 级的尼斯特栾姆法的计算格式为

$$\begin{cases}x_{n+1}=x_n+h\dot{x}_n+\dfrac{1}{6}h^2(K_1+K_2+K_3),\\ \dot{x}_{n+1}=\dot{x}_n+\dfrac{1}{6}h(K_1+2K_2+2K_3+K_4),\end{cases}\tag{13}$$

其中

$$K_1=f(t_n,x_n,\dot{x}_n),$$

$$K_2=f\left(t_n+\frac{1}{2}h,\quad x_n+\frac{h}{2}\dot{x}_n,\quad \dot{x}_n+\frac{h}{2}K_1\right),$$

$$K_3=f\left(t_n+\frac{1}{2}h,\quad x_n+\frac{h}{2}\dot{x}_n+\frac{h^2}{4}K_1,\ \dot{x}_n+\frac{1}{2}hK_2\right),$$

$$K_4=f\left(t_n+h,\ x_n+h\dot{x}_n+\frac{1}{2}h^2K_2,\ \dot{x}_n+hK_3\right).$$

例 4 取步长 $h=0.1$，用尼斯特栾姆法求解初值问题：

$$\begin{cases}\ddot{x}=t\dot{x}-3x,\\ x(0)=0,\\ \dot{x}(0)=-3\end{cases}$$

解 $K_1=t_n\dot{x}_n-3x_n$,

$$K_2=\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\left(\dot{x}_n+\frac{h}{2}K_1\right)-3\left(x_n+\frac{h}{2}\dot{x}_n\right),$$

$$K_3=\left(t_n+\frac{h}{2}\right)\left(\dot{x}_n+\frac{h}{2}K_2\right)-3\left(x_n+\frac{h}{2}\dot{x}_n+\frac{h^2}{4}K_1\right);$$

$$K_4=(t_n+h)(\dot{x}_n+hK_3)-3\left(x_n+h\dot{x}_n+\frac{1}{2}h^2K_2\right).$$

而计算格式为

$$x_{n+1}=x_n+h\dot{x}_n+\frac{1}{6}h^2(K_1+K_2+K_3),$$

$$\dot{x}_{n+1}=\dot{x}_n+\frac{1}{6}h(K_1+2K_2+2K_3+K_4).$$

执行 5 步计算的结果如下：

n	t_n	x_n	$\dot{x}_n$	精确解 $x(t_n)=t_n^2-3t_n$	误差的绝对值
0	0.0	0.0000	-3	0	0
1	0.1	-0.2980	-2.9700	-0.2990	0.001
2	0.2	-0.5910	-2.8937	-0.5920	0.001
3	0.3	-0.8734	-2.7441	-0.8730	0.0004
4	0.4	-1.1378	-2.5343	-1.136	0.0018
5	0.5	-1.3782	-2.2642	-1.375	0.0032

习　题

1. 应用欧拉方法取步长 $h=0.1$ 求解下列初值问题(执行5步)，并将计算结果与精确解作比较.

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-1,\\ x(0)=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2tx^2,\\ x(0)=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1+x^2;\\ x(0)=0;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-x^2,\\ x(0)=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

2. 对于微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1+x^2,\\ x(0)=0,\end{cases}$$

取步长 $h=0.1$.分别应用下列方法执行5步，并将计算结果与精确解作比较。

(1) 欧拉法； (2) 霍恩法； (3) 龙格-库塔法。

3. 用经典的龙格-库塔法，对下列微分方程的初值问题，分别取步长 $h=\frac{1}{4}$和 $h=\frac{1}{6}$,计算解在 $t=\frac{1}{2}$时的值.

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^2,\\ x(0)=1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x^2,\\ x(0)=1.\end{cases}$

4. 将下列二阶微分方程的初值问题化为微分方程组的初值问题，用经典的龙格—库塔法，取步长 $h=0.2$，执行2步：

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=0,\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1;$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\sin x=0,\quad x(0)=0.1,\quad \dot{x}(0)=0;$

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+x-x^3=0,\quad x(0)=0.1,\quad \dot{x}(0)=0.$

5. 用经典的龙格-库塔法求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1+(x-t)^2,\\ x(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

取步长 $h=0.1$，执行5步。

6. 应用尼斯特栾姆法求解初值问题，取步长 $h=0.1$，执行两步，并与精确解比较：

(1) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}-t\dfrac{dx}{dt}+4x=0,\\ x(0)=3,\quad \dot{x}(0)=0\quad (\text{精确解 } x(t)=t^4-6t^2+3).\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+2t\dfrac{dx}{dt}-2x=0,\\ x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1,\quad (\text{精确解 } x(t)=t).\end{cases}$

7. 用经典的龙格-库塔法，求下列初值问题的解在 $t=1$ 的近似值. 分别取步长 $h=0.1$ 和 0.025 进行计算，并将所得的结果同精确解的值比较.

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 + t - x, \\ x(0) = 0.（精确解 x(t) = t）; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 + x^2 - t^2, \\ x(0) = 0.\quad（精确解 x(t) = t）; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -1 + 2t + \dfrac{x^2}{(1+t^2)^2}, \\ x(0) = 1.\quad（精确解 x(t) = (1+t^2)）. \end{cases}$

§2 二阶微分方程边值问题的数值解法

一、打 靶 法

现在讨论二阶非线性微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\right), \\ x(a) = A, \quad x(b) = B. \end{cases} \tag{1}$$

假定它的精确解是存在的，要求它的数值解.

下面介绍求边值问题(1)数值解的打靶法，它分为两步：第一步，选取一个 s 值，解初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\right), \\ x(a) = A, \quad \dot{x}(a) = s, \end{cases} \tag{2}$$

我们可以采用§1中介绍的求解初值问题的数值方法，求(2)的数值解 $x(t, s)$. 由于 s 是个猜测值，一般 $x(b, s) \neq B$. 下一步的目标是寻找一个数 s^*，使 $x(b, s^*) = B$.

第二步，解方程

$$F(s) = x(b, s) - B = 0. \tag{3}$$

可以采用许多方法求方程(3)的根. 一种方法是两分法，如果 $s_1 < s_2$，使

$$F(s_1)>0, \quad F(s_2)<0,$$

则取 $s_3=\dfrac{s_1+s_2}{2}$，然后判断 $F(s_3)$的符号，再在区间(s_1,s_3)或(s_3,s_2)上继续用两分法。

为了加快求根过程的收敛速度，可采用牛顿迭代法，按下列公式进行迭代

$$s_{n+1}=s_n-F(s_n)/F'(s_n),$$

由于这里函数 $F(s)$的解析表达式是不知道的，因此直接计算 $F'(s_n)$有困难，通常改用差商来代替导数，即

$$F'(s_n)=\frac{F(s_n+\Delta s_n)-F(s_n)}{\Delta s_n}$$

为了使上述近似式误差较小，根据经验，可以取

$$\Delta s_n=\sqrt{\varepsilon}\, s_n,$$

其中 ε 是由计算机字长所限制的精度。

图 10.3 表示上述方法的求解过程

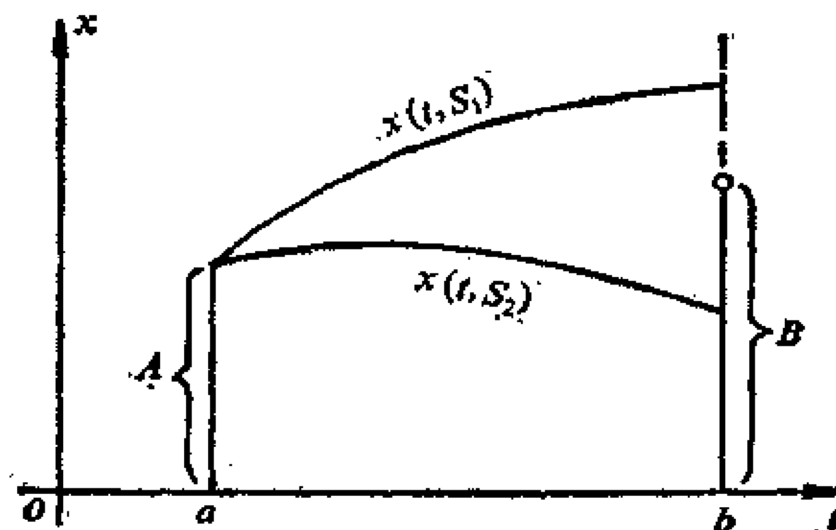


图 10.3

这里边值条件 $x(b)=B$，好比是打靶的"目标"，每次求出新的猜测值后，求解初值问题，相当于重新"瞄准"后打靶。因此，这种方法取名为"打靶法"。

打靶法是求解边值问题的一种常用方法，在电子计算机的程序包里，有解(2)和(3)的标准程序可用，使用方便．但是，打靶法也有缺点．对于某些 s 的值，$x(t,s)$并不在整个区间$[a,b]$上存在，于是 $F(s)$ 并不对一切 s 都有定义．在某些情形，$F(s)$对于 s 的改变非常敏感．此外，对于方程组情形，有时求解方程(3)比较困难．

例 1 用打靶法求解边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{3t}{t^2}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{3}{t^2}x,\\[2ex] x(1)=1,\quad x(2)=2.\end{cases}$$

解 第一步，解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{3t}{t^2}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{3}{t^2}x,\\[2ex] x(1)=1,\quad \dot{x}(1)=s,\end{cases}$$

其中 s 是猜测值．上述方程是欧拉方程，容易求得初值问题的解

$$x(t,s)=st+\frac{(s-1)}{2}t^2.$$

第二步，解方程

$$F(s)=x(2,s)-2=0,$$

即 $2s+(s-1)4-2=0$，解得 $s=1$．最后得到边值问题的解为

$$x(t,1)=t.$$

二、差 分 法

我们讨论两点边值问题

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)=f(t,x(t)),\\ x(a)=A,\quad x(b)=B.\end{cases}\tag{4}$$

用差分法求它的数值解．

首先取一个步长 h，将区间$[a,b]$分成一个离散点集：

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n+1}=b,$$

其中 $$t_i=a+ih\quad(i=1,2,\cdots,n+1).$$

然后将二阶导数用二阶差商代替，设解 $x(t)$在 t_i 处的近似值为x_i，

则得到关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方程组：

$$\begin{cases}x_0=A,\\ x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}=h^2f(t_i,x_i)\quad (i=1,2,\cdots,n),\\ x_{n+1}=B.\end{cases}\tag{5}$$

设 $G: R^n\to R^n$，定义为

$$(Gx)_i=f(t_i,x_i),\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

设 $J=(C_{ij})$ 是 $n\times n$ 阶三对角阵，$C_{ii}=2(i=1,2,\cdots,n)$，且当 $1\leqslant i,j\leqslant n$，$|i-j|=1$时，$C_{ij}=-1$，其余的 $C_{ij}=0$。则方程组(5) $(i=1,\cdots,n)$可写成

$$Jx+h^2Gx=0,\tag{6}$$

其中 $$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}.$$

因为 J 是非奇异阵，所以(6)等价于

$$x=-h^2J^{-1}Gx.\tag{7}$$

为了保证(7)有唯一解，必须对函数 $f(t,x)$加适当的条件。通常对 f 加的条件是

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L|x-y|,\quad t\in[a,b],\quad x,y\in R,$$

其中 $$0<L<8/(b-a)^2.$$

这时，$h^2J^{-1}G$ 是一个压缩映照，(7)存在唯一的解，这个解可以用迭代法进行计算。

对函数 $f(t,x)$加的另一种条件是

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\geqslant\beta>-\pi^2/(b-a)^2,t\in[a,b],\quad x\in R,$$

其中 β 为常数。

下面，我们讨论二阶变系数线性方程的两点边值问题

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)=p(t)x(t)+q(t),\\ x(a)=A,\ x(b)=B.\end{cases}\tag{8}$$

这时，用差分法得到的关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方程组(5)为：

$$\begin{cases}x_0=A,\\ x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}=h^2(p_ix_i+q_i),\ i=1,2,\cdots,n,\\ x_{n+1}=B,\end{cases}\tag{9}$$

或写成矩阵形式

$$Mx = r, \tag{10}$$

其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad r = h^2 \begin{pmatrix} q_1 - \dfrac{A}{h^2} \\ q^2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n - \dfrac{B}{h^2} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -(2+p_1h^2) & 1 & 0 \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -(2+p_2h^2) & 1 \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & -(2+p_{n-1}h^2) & & 1 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & & -(2+p_nh^2) \end{pmatrix}.$$

求解线代数方程组(10),可以用追赶法

从第一式

$$x_2 - 2x_1 + x_0 - p_1h^2x_1 = h^2q_1,$$

解出

$$x_1 = \frac{1}{2+p_1h^2}x_2 + \frac{A - q_1h^2}{2+p_1h^2} \triangleq u_1x_2 + V_1,$$

再从第二式

$$x_3 - 2x_2 + x_1 - p_2h^2x_2 = h^2q_2$$

解出

$$x_2 = \frac{1}{(2+p_2h^2) - u_1}x_3 + \frac{V_1 - q_2h^2}{(2+p_2h^2) - u_1} \triangleq u_2x_3 + V_2,$$

一般地,有

$$x_i = \frac{1}{(2+p_ih^2) - u_{i-1}}x_{i+1} + \frac{V_{i-1} - q_ih^2}{(2+p_ih^2) - u_{i-1}}$$

$$\triangleq u_i x_{i+1}+V_i, \tag{11}$$

其中

$$u_i=\frac{1}{(2+p_ih^2)-u_{i-1}},\quad v_i=u_i(V_{i-1}-q_ih^2). \tag{12}$$

首先进行“追”的过程，即按公式(12)计算出 u_i 和$V_i(i=1,2,\cdots,n)$，其中

$$u_1=\frac{1}{2+p_1h^2},\ V_1=u_1(A-q_1h^2).$$

然后进行“赶”的过程，从 $x_{n+1}=B$ 开始，按公式(11)倒过去逐个计算

$$x_n,x_{n-1},\cdots,x_1.$$

例 2 用差分法求解边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{2}{t^2+1}x,\\ x(0)=1,\quad x(1)=2,\quad 取步长h=0.1.\end{cases}$$

解 用差分法得到关于 $x_1,\cdots,x_9$ 的方程组为

$$\begin{cases}x_0=1,\\ x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}=0.01\cdot\dfrac{2}{1+t_i^2}x_i\qquad(i-1,2,\cdots,9),\\ x_{10}=2.\end{cases}$$

首先按照公式

$$u_i=\frac{1}{(2+p_ih^2)-u_{i-1}},\quad V_i=u_iV_{i-1},$$

$$u_1-\frac{1}{2+p_1h^2},\quad V_1=u_1$$

进行“追”的过程，然后按公式

$$x_i=u_ix_{i+1}+V_i,$$

$$x_{10}=2$$

进行“赶”的过程。逐步计算的结果如下：

i	p_i	u_i	v_i	x_i	精确解 $x(t_i)=1+t_i^2$
1	1.9802	0.4951	0.4951	1.0098	1.01
2	1.9231	0.6561	0.3248	1.0397	1.04
3	1.8349	0.7341	0.2384	1.0897	1.09
4	1.7241	0.7793	0.1858	1.1598	1.16
5	1.6000	0.8086	0.1502	1.2496	1.25
6	1.4705	0.8291	0.1245	1.3597	1.36
7	1.3423	0.8444	0.1051	1.4898	1.49
8	1.2195	0.8563	0.0900	1.6398	1.64
9	1.1050	0.8660	0.0779	1.8099	1.81
10				2.0000	2.0

习　题

1．用打靶法求解下列二阶微分方程的边值问题：

(1) $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+3t\dfrac{dx}{dt}+x=0,$

$x(1)=1,\quad x(2)=\dfrac{1}{2};$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{2}{1-x}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=0,$

$x(1)=2,\quad x(2)=\dfrac{3}{2}.$

2．用差分法求解下列二阶微分方程的边值问题：(取步长 $h=0.1$)

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-t\dfrac{dx}{dt}+x=1,$

$x(0)=x(2)=0;$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{3}{2}x^2,$

$x(0)=4, x(1)=1;$

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-(1+t^2)x=1$

$x(0)=1,\ x(1)=3.$

§3　刚性方程的数值解法

在许多应用领域中，特别是在化学工程和自动控制中，常常遇到一

类常微分方程的初值问题，它们显示出“刚性”的现象．这类方程通常称为“刚性”方程，它是一种病态方程．先考虑下面的例子．

例 1
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2000x + 999.75y + 1000.25, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = -2. \end{cases}$$

初值问题(1)的精确解是

$$\begin{cases} x(t) = -1.499875\,e^{-0.5t} + 0.499875\,e^{-2000.5t} + 1, \\ y(t) = -2.99975\,e^{-0.5t} - 0.00025\,e^{-2000.5t} + 1. \end{cases}$$

图 10.4 是表示 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的图像。

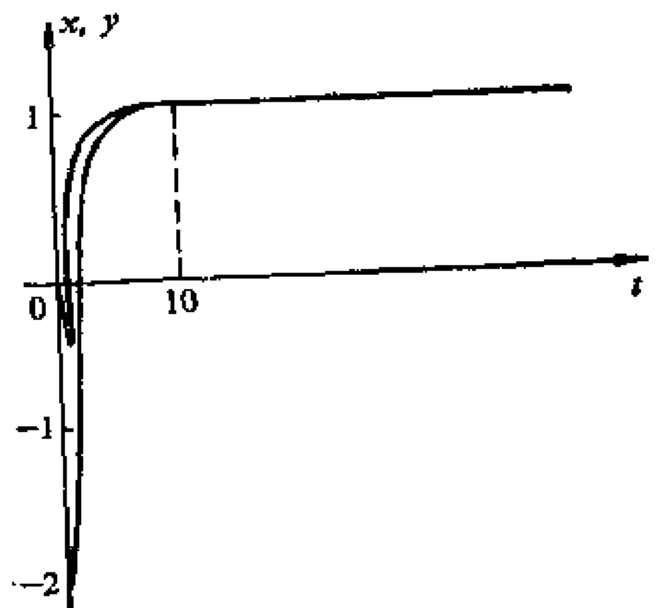


图 10.4

从图 10.4 可以看到，初值问题(1)的解开始时有一个短暂的过渡过程，然后趋向于稳态。当 t 在 0.002 附近时，解 $x(t)$ 和 $y(t)$ 变化非常剧烈，当 $t>10$ 时，它们逐渐进入平稳状态。

对于上述方程组，由于一开始解的变化非常剧烈，如果我们在 $0\leqslant t\leqslant 0.002$ 范围内，用数值方法求解，势必步长要取得很小。当解进入平稳状态以后，从截断误差的角度来看，步长 h 可以取得大一些。但是，从计算稳定性的角度看，通常采用的数值方法对 $|\lambda h|$ 都有限制，

例如，用欧拉法时，对h的限制为 $h<\frac{2}{\max|\lambda_i|}$，用龙格-库塔法时，稳定性对 h 的限制为 $h<\frac{2.78}{\max|\lambda_i|}$。对于方程组(1)，系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -2000 & 999.75 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征值是：$\lambda_1=-2000.5$，$\lambda_2=-0.5$。

由此可知，我们在平稳阶段仍只能选取很小的步长 h，这样，用一般的数值解法会使计算时间很长。

现在，我们考虑一般的线性常系数方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t), \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}\in R^n$，$A$ 是 $n\times n$ 阶矩阵，其特征值为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$。下面，给出刚性方程的一般定义。

定义 如果方程组(2)中，A 的特征值具有下列特性：

(i) $\mathrm{Re}\lambda_i<0$，$i=1,2,\cdots,n$；

(ii) $\max\limits_i|\mathrm{Re}\lambda_i|/\min|\mathrm{Re}\lambda_i|=s\gg 1$，

则称方程组(2)是刚性方程组，称 s 为刚性比。

对于非线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

置

$$A(t)=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

如果当 $t\in I$ 时，矩阵 $A(t)$ 的特征值 $\lambda_i(t)(i=1, 2, \cdots,n)$ 适合 (i)

(ii),则称方程组(3)在区间 I 上是刚性方程组。

对于例 1,刚性比 $s=4001$。实际问题中出现的刚性方程组，刚性比 s 可高达 10^8 的量级。

对于非线性刚性系统(3),若置 $L=\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|$, $A=\frac{\partial f}{\partial x}$,由于对于任何矩阵 A,有

$$\|A\|\geqslant\rho(A),$$

其中 $\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|$ 是 A 的谱半径。因此，当 $\max\limits_{i}|\lambda_i|\gg 0$ 时，得到 $L\gg 0$。所以,刚性系统有时候称为具有大李普希兹常数的系统。

对于刚性方程组用通常的数值方法求解，还会产生计算不稳定的现象。

下面介绍一种求刚性方程组(3)的数值解的预估-校正法，具体计算时按下列差分格式进行：

$$\begin{cases}x_{n+1}^{*}=2x_n-x_{n-1},\\ x_{n+1}=\left(I-\frac{2}{3}hA\right)^{-1}\left[\frac{2}{3}h\,f(t_{n+1},x_{n+1}^{*})-Ax_{n+1}^{*}\right.\\ \qquad\left.+\frac{4}{3}x_n-\frac{1}{3}x_{n-1}\right],\end{cases}\tag{5}$$

其中 I 是单位阵，$A=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{(t_{n+1},\,x_{n+1}^{*})}$。

对于线性常系数刚性方程组(2),公式(5)变成：

$$x_{n+1}=\left(I-\frac{2}{3}hA\right)^{-1}\left(\frac{4}{3}x_n-\frac{1}{3}x_{n-1}+\frac{2}{3}hf_{n+1}\right).$$

例 2
$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=0.04(1-x)-(1-y)y+0.0001(1-y)^2,\\ \frac{dy}{dt}=-10^4\frac{dx}{dt}+3000(1-y^2),\\ x(0)=0,\quad y(0)=1,\quad 0\leqslant t\leqslant 100.\end{cases}$$

本题如果采用经典的龙格-库塔方法计算，为了保证计算稳定,取步长 $h\leqslant 0.0005$,当步长 $h=0.001$ 时，计算结果将会发散。当用龙格

—库塔法，取 $h=0.00025$ 时，在区间[0,100]上积分需要计算 4×10^5 步。现在改用差分公式(5)，在区间 [0,0.1]上采用龙格—库塔法．取 $h=0.00025$，而在[0.1, 100]上采用 $h=0.2$ 的差分公式(5)，结果整个积分只需要 900 步．由此可见，对刚性方程组，采用公式(5)可以大大节省计算时间。

下面再介绍解刚性方程组的两种方法．为了保证计算的稳定，盖尔提出一种方法，计算按下列公式进行：

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x_{n+i}=h\beta_k f_{n+k}, \tag{6}$$

其中 h 为步长，$f_j=f(t_j,x_j)$。

盖尔法的计算公式(6)中的系数列在下表中。

K	β_k	α_6	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
1	1						1	-1
2	$\frac{2}{3}$					1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{6}{11}$				1	$-\frac{18}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{2}{11}$
4	$\frac{12}{25}$			1	$-\frac{48}{25}$	$\frac{36}{25}$	$-\frac{16}{25}$	$\frac{3}{25}$
5	$\frac{60}{137}$		1	$-\frac{300}{137}$	$\frac{300}{137}$	$-\frac{200}{137}$	$\frac{75}{137}$	$-\frac{12}{137}$
6	$\frac{60}{147}$	1	$-\frac{360}{147}$	$\frac{450}{147}$	$-\frac{400}{147}$	$\frac{225}{147}$	$-\frac{72}{147}$	$\frac{10}{147}$

用盖尔法计算，每一步需要解关于 x_{n+k} 的方程组．解刚性方程组也可以用隐式的龙格-库塔法．其计算公式为：

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+h\sum\limits_{i=1}^{N}b_iK_i, \\ K_i=f(t_n+c_ih,\quad x_n+h\sum\limits_{j=1}^{N}a_{ij}k_j) \\ \qquad (i=1,2,\cdots,N), \end{cases} \tag{7}$$

特别，$N=2$ 时，常用的有二阶及四阶方法．二阶方法按下列公式计算

$$
\begin{cases}
x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{2}h(K_1+K_2),\\
K_1=f(t_n,x_n),\\
K_2=f\left(t_n+h,\quad x_n+\dfrac{1}{2}hK_1+\dfrac{1}{2}hK_2\right).
\end{cases}
$$

四阶方法的计算公式为：

$$
\begin{cases}
x_{n+1}=x_n+\dfrac{h}{2}(K_1+K_2),\\
K_1=f\left(t_n+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)h,\quad x_n+\dfrac{1}{4}hK_1+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)hK_2\right),\\
K_2=f\left(t_n+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)h,\quad x_n+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)hK_1+\dfrac{1}{4}hK_2\right).
\end{cases}
$$

关于刚性方程组的计算方法的详细讨论可参看文献[7]。

参 考 文 献

[1] Φ·P·甘特马赫尔著，柯召译，《矩阵论》下册，高等教育出版社，1957.

[2] A·A·安德罗诺夫、A·A·维特、C·Э·哈依金著，振动理论(上册)，科学出版社，1973.

[3] M·布朗著，张鸿林译，微分方程及其应用，人民教育出版社，1980.

[4] T·吉泽太郎著，郑祖庥、陈纪鹏、张书年译，稳定性理论与周期解和概周期解的存在性，广西出版社，1984.

[5] H.J.Freedman, Deterministic Mathematical Models in Population Ecology. *Pure and Appl.Math*.V.57 1980.

[6] J.D.Lambert, Computational Methods in Ordinary Differential equations, 1976.

[7] L. Gladwell、D. K. Sayers, Computational techniques for ordinary differential equations, 1982.

[8] R.H.Martin, Ordinary differential equations, 1983.

[9] J. B. Dence, 化学中的数学方法，王知群译，科学出版社，1981.

[10] π·M·巴上涅尔、M·E·波津著，化工数学，邬行彦等译，高等教育出版社出版，1957.

[11] William.F.Lucas编, Modules in Applied Mathematics; Vol.1 Differential Equation Models. Springer-Verlag, New York Heidelberg, Berlin, 1983.

[12] A·Φ·菲利波夫著，孙广成等译，常微分方程习题集，上海科学技术出版社，1981.

[13] P. Hartman, On an oscillation criterion of de la Vallee Poussin, *Quart Appl. Math*. 13, 330—332, 1955.

[14] Z.Opial, Sur une inegalité de la Vallee Poussin. *Ann. Polon. Math*. 6, 87—91, 1959.

[15] D.S.Mitrinović, P.M.Vasić 著，赵汉宾译，分析不等式，广西人民出版社，1986.

[16] 钱学森、宋健著，工程控制论，(上、下册)，科学出版社，1980.

[17] 秦元勋、王慕秋、王联著，运动稳定性 应用，科学出版社．1981．
[18] 金福临、李训经等编，常微分方程 技术出版社，1984．
[19] 叶彦谦编，常微分方程讲义，上海科学 出版社，1983．
[20] 王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松等编， 微分方程，高等教育出版社，1984．
[21] 张肃文编，非线性振荡引论，高等教育出版社，1982．
[22] 周尚仁、权宏顺编，常微分方程习题集，人民教育出版社，1981．
[23] 钱祥征编，常微分方程解题方法，湖南科技出版社，1984．
[24] 武汉大学、山东大学计算数学教研室编，计算方法，人民教育出版社，1979．
[25] 李荣华、冯果忱编，微分方程数值解法，人民教育出版社，1980．
[26] 理查德·米勒、安东尼·米歇尔著，傅希林、阮炯译，常微分方程，河南教育出版社，1989．
[27] D.N.Burghes，M.S.Borrie，Modelling with Differential Equations，1981．